

Probestudium

Sommersemester 2010, Theoriekurs

2 Vorlesungen zur Einführung in die spezielle Relativitätstheorie

H. W. Diehl

Fakultät für Physik, U. Duisburg-Essen

26. Juni und 3. Juli 2010

- Physik: hat zu tun mit Vorgängen in Raum und Zeit
- Ereignis \mathcal{P} : Wo und wann geschieht etwas?

$$\mathcal{P} \leftrightarrow (t, x, y, z) \in \underbrace{\mathbb{R}}_{\substack{\text{reelle Zahlen} \\ \text{Zeitmenge}}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\substack{\text{3 reelle Ortskoordinaten} \\ \text{Ortsraum, Punktmenge}}}$$

= Punkt in **4dim.** Raum

t = Zeit(koordinate)

x, y, z = 3 Ortskoordinaten

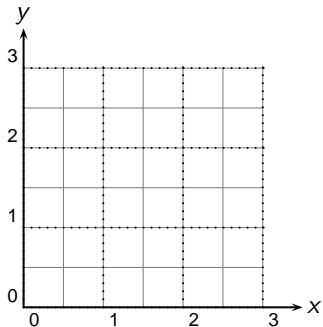
- Fragen:

1 Wie t, x, y, z einführen?

2 **Geometrie:** Abstände, Zeitdifferenzen, Abstände (?) $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$?

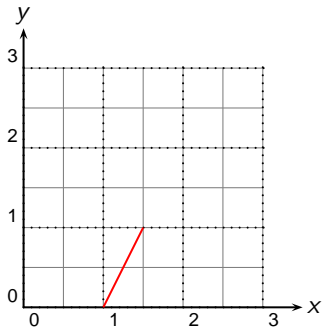
Einführung von Ortskoordinaten

- Nehme Maßstab:  „Urmeter“



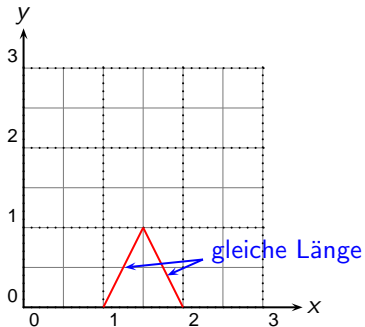
Einführung von Ortskoordinaten

- Nehme Maßstab: $\overline{\quad} \text{1 m}$ „Urmeter“



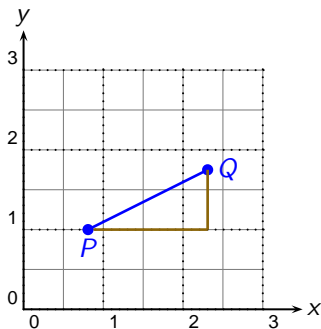
Einführung von Ortskoordinaten

- Nehme Maßstab: $\overline{\quad\quad\quad} \text{ 1 m}$ „Urmeter“



Einführung von Ortskoordinaten

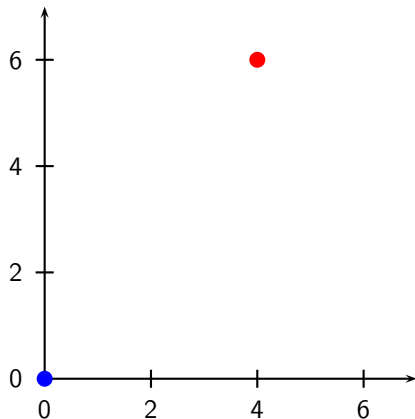
- Nehme Maßstab: $\overline{\quad\quad\quad} \text{ 1 m}$ „Urmeter“



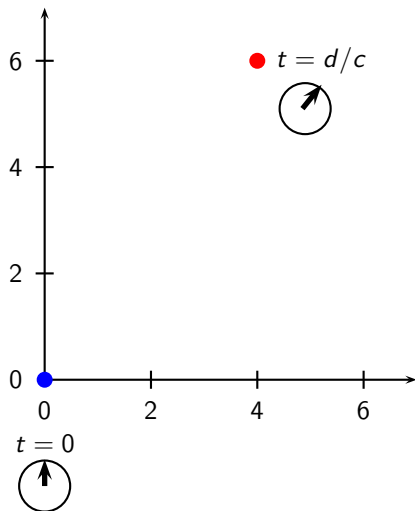
euklidischer Abstand:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

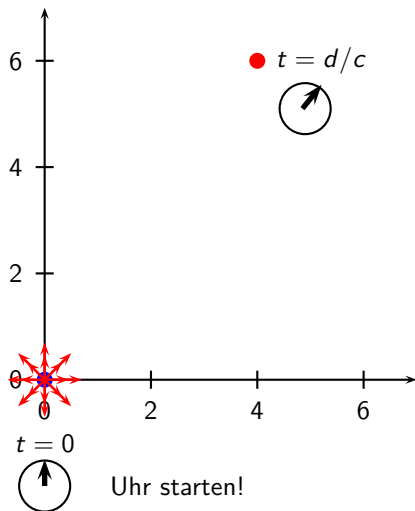
Synchronisation von Uhren



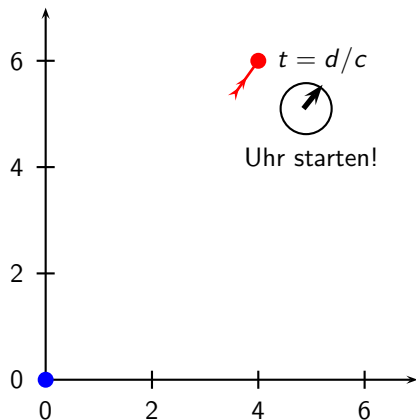
Synchronisation von Uhren



Synchronisation von Uhren



Synchronisation von Uhren



I. Aristotelisch-Newtonsche Raumzeit

- Raum und Zeit = **absolut!**

I. Aristotelisch-Newtonsche Raumzeit

- Raum und Zeit = **absolut!**

II. Galilei-Newtonsche Raumzeit

- „Gleichortigkeit“ **relativ!**
„Ruhender“ und gleichförmig-geradlinig bewegter Beobachter
stimmen nicht überein!
- Galilei-Invarianz

I. Aristotelisch-Newtonsche Raumzeit

- Raum und Zeit = **absolut!**

II. Galilei-Newtonsche Raumzeit

- „Gleichortigkeit“ **relativ!**
„Ruhender“ und gleichförmig-geradlinig bewegter Beobachter
stimmen nicht überein!
- Galilei-Invarianz

III. Einsteinsche Raumzeit der speziellen RT

- Gleichortigkeit **und Gleichzeitigkeit relativ!**
- Lorentz-Invarianz

I. Aristotelisch-Newtonsche Raumzeit

- Raum und Zeit = **absolut!**

II. Galilei-Newtonsche Raumzeit

- „Gleichortigkeit“ **relativ!**
„Ruhender“ und gleichförmig-geradlinig bewegter Beobachter
stimmen nicht überein!
- **Galilei-Invarianz**

III. Einsteinsche Raumzeit der speziellen RT

- Gleichortigkeit **und Gleichzeitigkeit relativ!**
- **Lorentz-Invarianz**

IV. Einsteinsche Raumzeit der allgemeinen RT (wird nicht behandelt)

- Gravitationsfeld **lokal äquivalent** zu **beschleunigt bewegtem** Bezugssystem

“Space tells matter how to move. Matter tells space how to curve” (Misner, Thorne & Wheeler, Gravitation)

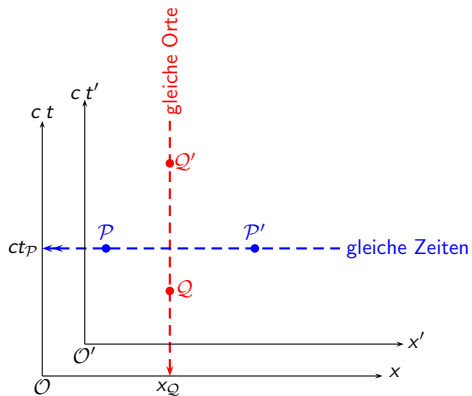
Aristotelisch-Newtonsche Raumzeit

- Raum & Zeit sind absolut!
- Ruhende Systeme ausgezeichnet,

- Raum & Zeit sind absolut!
- Ruhende Systeme ausgezeichnet,
- aber räumlicher Ursprung, räumliche Achsenorientierung und Zeitnullpunkt frei wählbar.
- Alle Systeme \mathcal{K} und \mathcal{K}' , die durch räumliche Verschiebungen und Drehungen sowie zeitliche Verschiebungen $t' = t - \tau$ auseinander hervorgehen, sind **gleichberechtigt hinsichtlich der Naturgesetze!**

- Raum & Zeit sind absolut!
- Ruhende Systeme ausgezeichnet,
- aber räumlicher Ursprung, räumliche Achsenorientierung und Zeitnullpunkt frei wählbar.
- Alle Systeme \mathcal{K} und \mathcal{K}' , die durch räumliche Verschiebungen und Drehungen sowie zeitliche Verschiebungen $t' = t - \tau$ auseinander hervorgehen, sind **gleichberechtigt hinsichtlich der Naturgesetze!**
- Naturgesetze müssen in \mathcal{K} und \mathcal{K}' **dieselbe Form haben!**

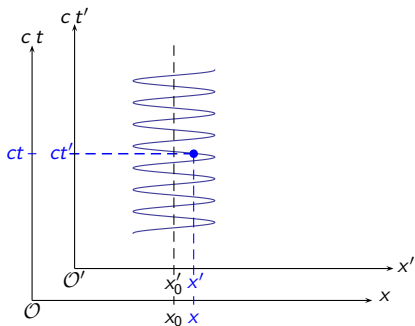
Absolutheit von Gleichortigkeit und -zeitigkeit in AN-RZ



- P und P' gleichzeitig für \mathcal{K} und \mathcal{K}' !
- Q und Q' gleichortig für \mathcal{K} und \mathcal{K}' !

Forminvarianz der Bewegungsgleichungen (AN-RZ)

Betrachten Federschwingung

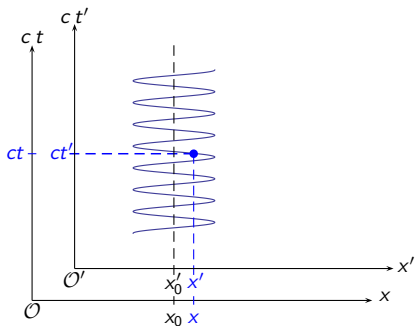


- Kevin (\mathcal{K}) misst: $(x, t) \Rightarrow x(t)$; Bewegungsgl.:
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -f(x - x_0)$$
- Kathrin (\mathcal{K}') misst: $(x', t') \Rightarrow x'(t')$; Beweggl.:
$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -f(x' - x'_0)$$

Wer hat Recht?

Forminvarianz der Bewegungsgleichungen (AN-RZ)

Betrachten Federschwingung



- Kevin (\mathcal{K}) misst: $(x, t) \Rightarrow x(t)$; Bewegungsgl.:
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -f(x - x_0)$$
- Kathrin (\mathcal{K}') misst: $(x', t') \Rightarrow x'(t')$; Beweggl.:
$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -f(x' - x'_0)$$

Wer hat Recht? **Beide!**

Forminvarianz der Bewegungsgleichungen (AN-RZ)

- Zusammenhang der kinematische Größen:

$$\frac{dx'}{dt'} = \underbrace{\frac{d(x-a)}{dt}}_{=dx/dt} \underbrace{\frac{d(t'+\tau)}{dt'}}_{=1} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \frac{dx'}{dt'} = \left(\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dt}{dt'} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Kraftfunktionen:

- Kraftfunktion von Kevin (\mathcal{K}): $-f(x - x_0) \equiv F(x - x_0)$
- Kraftfunktion von Kathrin (\mathcal{K}'): $-f(x' - x'_0) \equiv F'(x' - x'_0)$

- gleiche Kraftfunktion: $F'(x) = F(x)$

$$\Rightarrow F'(x' - x'_0) = F'[\underbrace{(x - a) - (x_0 - a)}_{x - x_0}] \stackrel{F=F'}{=} F(x - x_0)$$

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = -f(x - x_0)} \iff \boxed{m \frac{d^2x'}{dt'^2} = -f(x' - x'_0)}$$

- In AN-RZ: Klasse „**ruhender**“ Bezugssysteme ausgezeichnet.
- Alle Bezugssysteme \mathcal{K}' , die aus einem „**ruhendem**“ Bezugssystem \mathcal{K} durch
 - ① räumliche Verschiebungen,
 - ② räumliche Drehungen sowie
 - ③ zeitliche Translationenhervorgehen, sind **gleichberechtigt**.
- Bewegungsgleichung haben in allen solchen \mathcal{K}' **dieselbe Form**.

- In AN-RZ: Klasse „**ruhender**“ Bezugssysteme ausgezeichnet.
- Alle Bezugssysteme \mathcal{K}' , die aus einem „**ruhendem**“ Bezugssystem \mathcal{K} durch
 - 1 räumliche Verschiebungen,
 - 2 räumliche Drehungen sowie
 - 3 zeitliche Translationenhervorgehen, sind **gleichberechtigt**.
- Bewegungsgleichung haben in allen solchen \mathcal{K}' **dieselbe Form**.

Problem: Wie „ruhend“ feststellen?

1. Newtonsches Gesetz (Lex prima)

„Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig-geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.“

- Gesetz postuliert Beharrungsvermögen oder die Trägheit von Körpern.
- Ergebnis der Fallversuche von Galilei (1636)
- Zustände der **Ruhe** und **gleichförmig-geradlinigen Bewegung** als äquivalent erkannt.

- Newtonsche Gesetze auch für *gleichförmig-geradlinig* bewegte Beobachter gültig!
- Kein „absolut ruhendes“ Bezugssystem ausgezeichnet oder physikalisch zu ermitteln. Newtonsche Gesetze gelten in der durch das **Lex Prima (Trägheitsgesetz)** ausgezeichneten Klasse von **Inertialsystemen**.
- Daher: Alle solche Inertialsysteme — und damit alle gegeneinander geradlinig-gleichförmig bewegten Beobachter — sind für die Formulierung der physikalischen Gesetze (Newtonsche Bewegungsgleichungen) *gleichberechtigt*!

- Newtonsche Gesetze auch für *gleichförmig-geradlinig* bewegte Beobachter gültig!
- Kein „absolut ruhendes“ Bezugssystem ausgezeichnet oder physikalisch zu ermitteln. Newtonsche Gesetze gelten in der durch das **Lex Prima (Trägheitsgesetz)** ausgezeichneten Klasse von **Inertialsystemen**.
- Daher: Alle solche Inertialsysteme — und damit alle gegeneinander geradlinig-gleichförmig bewegten Beobachter — sind für die Formulierung der physikalischen Gesetze (Newtonsche Bewegungsgleichungen) *gleichberechtigt*!
- Forminvarianz bezüglich **Galileitransformationen!**

zusätzliche Transformationen:

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Galilei-Newtonsche Raumzeit

- IS $\mathcal{K} \leftarrow \mathcal{K}'$, dann auch \mathcal{K}' IS
- Jetzt: Alle IS für Formulierung der Naturgesetze gleichberechtigt, Forminvarianz der Naturgesetze bzgl. Galileitransformationen.

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - Vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\Rightarrow \boxed{v' = v - V}$$

$$\Rightarrow \boxed{b' = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = b}$$

Galilei-Newtonsche Raumzeit

- IS $\mathcal{K} \longleftarrow \mathcal{K}'$, dann auch \mathcal{K}' IS
- Jetzt: Alle IS für Formulierung der Naturgesetze gleichberechtigt, Forminvarianz der Naturgesetze bzgl. Galileitransformationen.

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - Vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\Rightarrow \boxed{v' = v - V}$$

$$\Rightarrow \boxed{b' = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = b}$$

• **Kraft:** $F(\underbrace{x' - x_0'}_{x - Vt - (x_0 - Vt)}) = F(x - x_0)$ **galileiinvariant!**

•
$$m \frac{d^2x'}{dt'^2} = F(x' - x_0') \iff m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x - x_0)$$

Galilei-Newtonsche Raumzeit

- IS $\mathcal{K} \longleftarrow \mathcal{K}'$, dann auch \mathcal{K}' IS
- Jetzt: Alle IS für Formulierung der Naturgesetze gleichberechtigt, Forminvarianz der Naturgesetze bzgl. Galileitransformationen.

$$v' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - Vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\Rightarrow \boxed{v' = v - V}$$

$$\Rightarrow \boxed{b' = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = b}$$

•

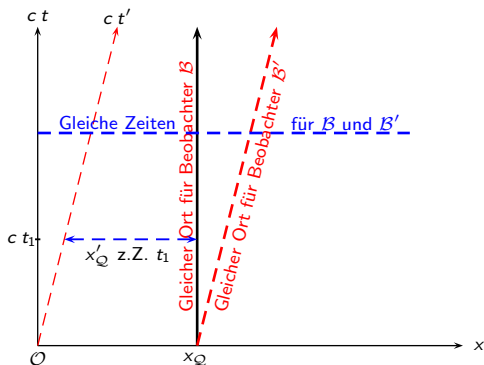
Kraft: $F(\underbrace{x' - x'_0}_{x - Vt - (x_0 - Vt)}) = F(x - x_0)$ **galileiinvariant!**

•

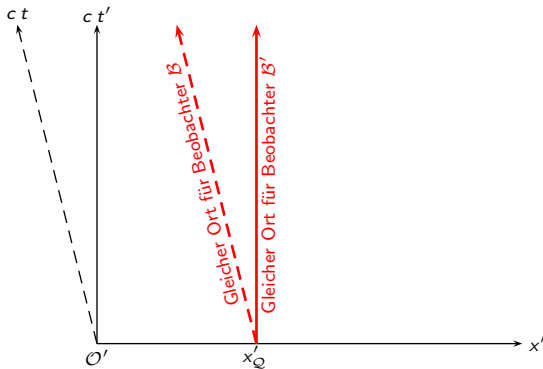
$$m \frac{d^2x'}{dt'^2} = F(x' - x'_0) \iff m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x - x_0)$$

- **Konsequenz: Gleichortigkeit wird relativ!**

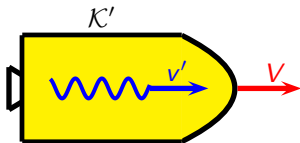
Relativität der Gleichortigkeit



Relativität der Gleichortigkeit



Galilei-Invarianz und Addition von Geschwindigkeiten



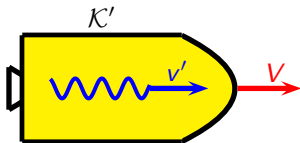
\mathcal{K} : „Laborsystem“

- Welle in **Medium** (Gas, Wasser, ...), Ausbreitungsgeschwindigkeit: v' , Medium ruhe in \mathcal{K}' (Rakete)
- Galilei-Invarianz \Rightarrow Ausbreitungsgeschwindigkeit in \mathcal{K} :

$$v = v' + V$$

Addition der Geschwindigkeiten!

Galilei-Invarianz und Addition von Geschwindigkeiten



\mathcal{K} : „Laborsystem“

- Welle in **Medium** (Gas, Wasser, ...), Ausbreitungsgeschwindigkeit: v' , Medium ruhe in \mathcal{K}' (Rakete)
- Galilei-Invarianz \Rightarrow Ausbreitungsgeschwindigkeit in \mathcal{K} :

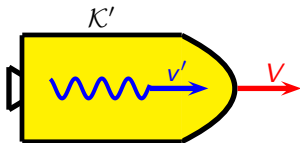
$$v = v' + V$$

Addition der Geschwindigkeiten!

- Für Licht?

$$c' \stackrel{?}{=} c + V$$

Galilei-Invarianz und Addition von Geschwindigkeiten



\mathcal{K} : „Laborsystem“

- Welle in **Medium** (Gas, Wasser, ...), Ausbreitungsgeschwindigkeit: v' , Medium ruhe in \mathcal{K}' (Rakete)
- Galilei-Invarianz \Rightarrow Ausbreitungsgeschwindigkeit in \mathcal{K} :

$$v = v' + V$$

Addition der Geschwindigkeiten!

- Für Licht?

$$c' \stackrel{?}{=} c + V \quad \text{Nein!}$$

Elektrodynamik, Äther und Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

- In grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik (Maxwell-Gln):
ein Parameter c — in welchem Bezugssystem?
- Wenn in \mathcal{K} & Galilei-Invarianz $\Rightarrow c' = c - V$ in \mathcal{K}' !

Elektrodynamik, Äther und Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

- In grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik (Maxwell-Gln):
ein Parameter c — in welchem Bezugssystem?
- Wenn in \mathcal{K} & Galilei-Invarianz $\Rightarrow c' = c - V$ in \mathcal{K}' !
- **denkbare Alternativen:**
 - 1 Maxwellgln & daher c nur in ausgezeichnetem System \mathcal{K}_0 gültig, indem vermutetes Trägermedium „Äther“ ruht.
In \mathcal{K}' : galileitransformierte Maxwellgln ($\Rightarrow c' = c - V$)
 - 2 Maxwellgln in allen Inertialsystemen \mathcal{K}' gültig: $\Rightarrow c' = c$,
keine Galilei-Invarianz,
Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach!

Elektrodynamik, Äther und Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

- In grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik (Maxwell-Gln):
ein Parameter c — in welchem Bezugssystem?
- Wenn in \mathcal{K} & Galilei-Invarianz $\Rightarrow c' = c - V$ in \mathcal{K}' !
- **denkbare Alternativen:**
 - 1 Maxwellgln & daher c nur in ausgezeichnetem System \mathcal{K}_0 gültig,
indem vermutetes Trägermedium „Äther“ ruht.
In \mathcal{K}' : **galileitransformierte Maxwellgln** ($\Rightarrow c' = c - V$)
 - 2 Maxwellgln in **allen** Inertialsystemen \mathcal{K}' gültig: $\Rightarrow c' = c$,
keine Galilei-Invarianz,
Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach!
- **Michelson-Morley-Experimente** (1881, 1887, s. Skript):
Äther **nicht** nachweisbar! $c' = c$ für alle Inertialsysteme!

Elektrodynamik, Äther und Invarianz der Vakuumlichtgeschwindigkeit

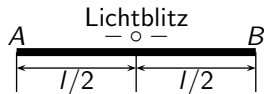
- In grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik (Maxwell-Gln): ein Parameter c — in welchem Bezugssystem?
- Wenn in \mathcal{K} & Galilei-Invarianz $\Rightarrow c' = c - V$ in \mathcal{K}' !
- **denkbare Alternativen:**
 - 1 MaxwellGln & daher c nur in ausgezeichnetem System \mathcal{K}_0 gültig, indem vermutetes Trägermedium „Äther“ ruht.
In \mathcal{K}' : galileitransformierte MaxwellGln ($\Rightarrow c' = c - V$)
 - 2 MaxwellGln in allen Inertialsystemen \mathcal{K}' gültig: $\Rightarrow c' = c$, keine Galilei-Invarianz, Geschwindigkeiten addieren sich nicht einfach!
- **Michelson-Morley-Experimente** (1881, 1887, s. Skript):
Äther nicht nachweisbar! $c' = c$ für alle Inertialsysteme!

Konsequenzen? Einsteinsche SRT!

- E1:** Raum und Zeit sind **homogen**. Der Raum ist **isotrop**. (Kein Ort, Zeitpunkt und Richtung ausgezeichnet.)
- E2:**
- a) Es ex. ein **Inertialsystem (IS)** \mathcal{I} (indem sich kräftefreie Körper gleichförmig-geradlinig bewegen).
 - b) Jedes Bezugssystem \mathcal{K} , welches sich mit $\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$ bzgl. \mathcal{I} bewegt, ist ebenfalls ein IS.
 - c) Die Naturgesetze haben in allen IS **dieselbe Form**.
- E3:** Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit hat in allen IS **denselben Wert c** .

E2 wird auch **Einsteinsches Relativitätsprinzip** genannt.

E3 \Rightarrow Die Relativität der Gleichzeitigkeit



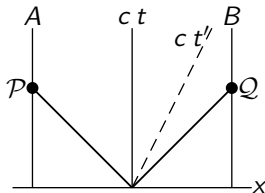
Ereignisse

\mathcal{P} : Licht bei A,

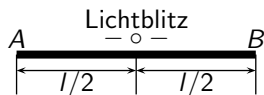
\mathcal{Q} : Licht bei B.

von \mathcal{K} und \mathcal{K}' (Geschwindigkeit \vec{v} bzgl. \mathcal{K}) aus betrachten.

$$c^2(t_{\mathcal{P}} - t_{\mathcal{Q}})^2 - (x_{\mathcal{P}} - x_{\mathcal{Q}})^2 = c^2(t'_{\mathcal{P}} - t'_{\mathcal{Q}})^2 - (x'_{\mathcal{P}} - x'_{\mathcal{Q}})^2 = 0$$



E3 \Rightarrow Die Relativität der Gleichzeitigkeit



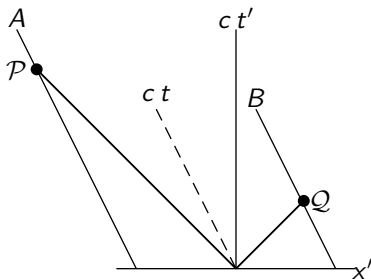
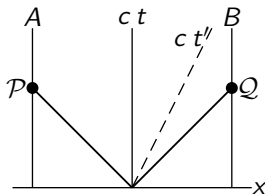
Ereignisse

\mathcal{P} : Licht bei A,

\mathcal{Q} : Licht bei B.

von \mathcal{K} und \mathcal{K}' (Geschwindigkeit \vec{v} bzgl. \mathcal{K}) aus betrachten.

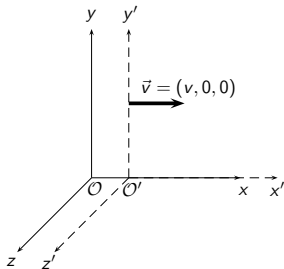
$$c^2(t_P - t_Q)^2 - (x_P - x_Q)^2 = c^2(t'_P - t'_Q)^2 - (x'_P - x'_Q)^2 = 0$$



$$t'_P \neq t'_Q$$

Konsequenzen aus den Einsteinschen Postulaten

- E1 \Rightarrow Transformation = linear!
- E1 \Rightarrow \mathcal{K} und \mathcal{K}' können durch Drehungen und Verschiebungen in Standardkonfigurationen gebracht werden:



$$ct' = A ct + B x$$

$$x' = C ct + D x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$A, B, C, D = \text{Funkt'n}(V/c)$$

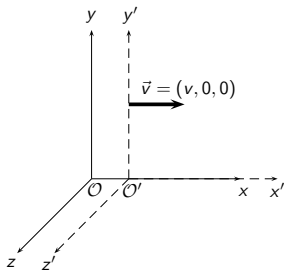
- Beh.: Viererabstandsquadrat

$$s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2 \equiv c^2(t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}})^2 - (x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}})^2$$

ist **invariant** für bel. Ereign. $\mathcal{E} = (ct_{\mathcal{E}}, x_{\mathcal{E}}, 0, 0)$ & $\mathcal{F} = (ct_{\mathcal{F}}, x_{\mathcal{F}}, 0, 0)$!

Konsequenzen aus den Einsteinschen Postulaten

- E1 \Rightarrow Transformation = linear!
- E1 \Rightarrow \mathcal{K} und \mathcal{K}' können durch Drehungen und Verschiebungen in Standardkonfigurationen gebracht werden:



$$ct' = A ct + B x$$

$$x' = C ct + D x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$A, B, C, D = \text{Funkt'n}(V/c)$$

- Beh.: Viererabstandsquadrat

$$s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2 \equiv c^2(t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}})^2 - (x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}})^2 = c^2(t'_{\mathcal{E}} - t'_{\mathcal{F}})^2 - (x'_{\mathcal{E}} - x'_{\mathcal{F}})^2$$

ist **invariant** für bel. Ereign. $\mathcal{E} = (ct_{\mathcal{E}}, x_{\mathcal{E}}, 0, 0)$ & $\mathcal{F} = (ct_{\mathcal{F}}, x_{\mathcal{F}}, 0, 0)$!

Beweis der Invarianz von $s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2$

- Notation $t \equiv t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}}$, $x \equiv x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = (Act + Bx)^2 - (Cct + Dx)^2 \\ &= (A^2 - C^2)(ct)^2 + 2(AB - CD)ctx + (B^2 - D^2)x^2 \\ &= \underbrace{(A^2 - C^2)}_{\equiv g_1} s^2 + 2 \underbrace{(AB - CD)}_{\equiv g_2} ct x + \underbrace{(A^2 - C^2 + B^2 - D^2)}_{\equiv g_3} x^2 \end{aligned}$$

Beweis der Invarianz von $s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2$

- Notation $t \equiv t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}}$, $x \equiv x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = (Act + Bx)^2 - (Cct + Dx)^2 \\ &= \underbrace{(A^2 - C^2)}_{\equiv g_1} s^2 + 2 \underbrace{(AB - CD)}_{\equiv g_2} ct x + \underbrace{(A^2 - C^2 + B^2 - D^2)}_{\equiv g_3} x^2 \end{aligned}$$

- Wissen: $s'^2 = s^2 = 0$ für $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, $\mathcal{F} = \mathcal{Q}$, also $ct = \pm x$.

$$\Rightarrow 2g_2 ct x + g_3 x^2 = 0 \text{ für bel. } ct = \pm x$$

$$ct = x \quad \Rightarrow (2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

$$ct = -x \quad \Rightarrow (-2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

$$\text{Addition:} \quad 2g_3 = 0$$

$$\text{Subtraktion:} \quad 4g_2 = 0$$

Beweis der Invarianz von $s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2$

- Notation $t \equiv t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}}$, $x \equiv x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = (Act + Bx)^2 - (Cct + Dx)^2 \\ &= \underbrace{(A^2 - C^2)}_{\equiv g_1} s^2 + 2 \underbrace{(AB - CD)}_{\equiv g_2} ct x + \underbrace{(A^2 - C^2 + B^2 - D^2)}_{\equiv g_3} x^2 \end{aligned}$$

- Wissen: $s'^2 = s^2 = 0$ für $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, $\mathcal{F} = \mathcal{Q}$, also $ct = \pm x$.

$$\Rightarrow 2g_2 ct x + g_3 x^2 = 0 \text{ für bel. } ct = \pm x$$

$$ct = x \quad \Rightarrow (2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

$$ct = -x \quad \Rightarrow (-2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

$$\text{Addition:} \quad 2g_3 = 0$$

$$\text{Subtraktion:} \quad 4g_2 = 0$$

- $\Rightarrow s'^2 = g_1(V/c) s^2$; wegen E2 $\Rightarrow s^2 = g_1(-V/c) s'^2$

Beweis der Invarianz von $s_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^2$

- Notation $t \equiv t_{\mathcal{E}} - t_{\mathcal{F}}$, $x \equiv x_{\mathcal{E}} - x_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = (Act + Bx)^2 - (Cct + Dx)^2 \\ &= \underbrace{(A^2 - C^2)}_{\equiv g_1} s^2 + 2 \underbrace{(AB - CD)}_{\equiv g_2} ct x + \underbrace{(A^2 - C^2 + B^2 - D^2)}_{\equiv g_3} x^2 \end{aligned}$$

- Wissen: $s'^2 = s^2 = 0$ für $\mathcal{E} = \mathcal{P}$, $\mathcal{F} = \mathcal{Q}$, also $ct = \pm x$.

$$\Rightarrow 2g_2 ct x + g_3 x^2 = 0 \text{ für bel. } ct = \pm x$$

$$ct = x \quad \Rightarrow (2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

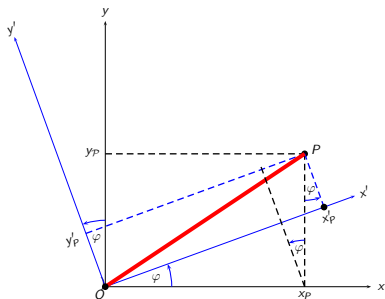
$$ct = -x \quad \Rightarrow (-2g_2 + g_3)x^2 = 0$$

$$\text{Addition:} \quad 2g_3 = 0$$

$$\text{Subtraktion:} \quad 4g_2 = 0$$

- $\Rightarrow s'^2 = g_1(V/c) s^2$; wegen E2 $\Rightarrow s^2 = g_1(-V/c) s'^2$
- $\Rightarrow g_1(V/c)g_1(-V/c) = 1$ **Isotropie d. Raumes** $\Rightarrow g_1(V/c) = g(-V/c)$
 $\Rightarrow g_1 = \pm 1$; $V = 0$: $\Rightarrow g_1 = 1$. QED

Vergleich: Rotationen & x-Boost



Invarianz: (Pythagoras)

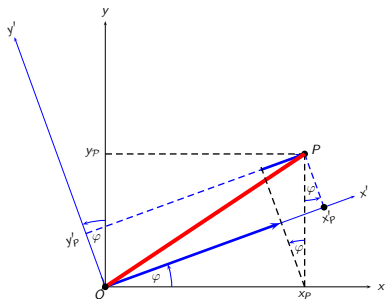
$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Setzen $y = ict \Rightarrow$ Invarianz: $x^2 + i^2(ct)^2 = x^2 - (ct)^2 = -s^2$

Vergleich: Rotationen & x-Boost



Invarianz: (Pythagoras)

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

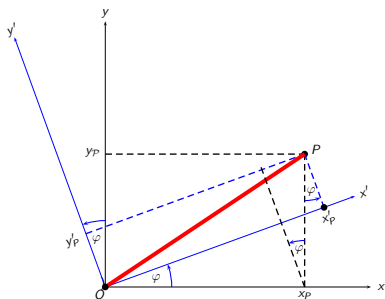
Setzen $y = ict \Rightarrow$ Invarianz: $x^2 + i^2(ct)^2 = x^2 - (ct)^2 = -s^2$

$$x' = x \cos \varphi + ict \sin \varphi = x \cosh(\varphi/i) - \underbrace{ct \sinh(\varphi/i)}_{-i \sin \varphi}$$

$$ict' = -x \sin \varphi + ict \cos \varphi = i[-x \sinh(\varphi/i) + ct \cosh(\varphi/i)]$$

$\equiv \omega$

Vergleich: Rotationen & x-Boost



Invarianz: (Pythagoras)

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

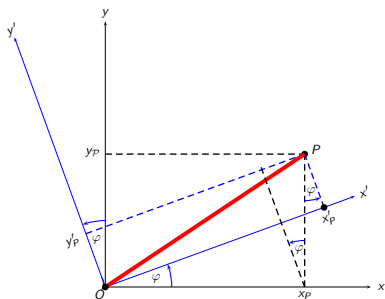
$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Setzen $y = ict \Rightarrow$ Invarianz: $x^2 + i^2(ct)^2 = x^2 - (ct)^2 = -s^2$

$$x' = x \underbrace{\cosh \omega}_{=A} - ct \underbrace{\sinh \omega}_{=-B}$$

$$ct' = -x \underbrace{\sinh \omega}_{=C} + ct \underbrace{\cosh \omega}_{=D}$$

Vergleich: Rotationen & x-Boost



Invarianz: (Pythagoras)

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

Setzen $y = ict \Rightarrow$ Invarianz: $x^2 + i^2(ct)^2 = x^2 - (ct)^2 = -s^2$

$$x' = x \underbrace{\cosh \omega}_{=A} - ct \underbrace{\sinh \omega}_{=-B}$$

$$ct' = -x \underbrace{\sinh \omega}_{=C} + ct \underbrace{\cosh \omega}_{=D}$$

Bedeutung von ω ?

Bedeutung und Bestimmung von ω

Räumlicher Ursprung $x' = 0$ von \mathcal{K}' : Bahnkurve: $x = Vt$

$$0 = Vt \cosh \omega - ct \sinh \omega \Rightarrow \tanh \omega = \frac{V}{c}$$

Ergebnis: Lorentz-Transformation (x-Boost):

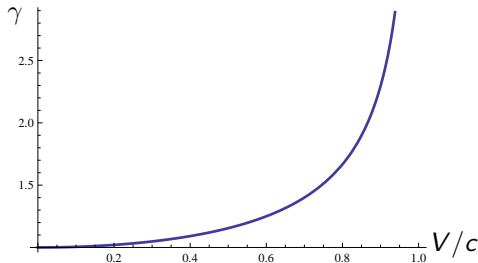
$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right); & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\x' &= \gamma (x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

Bedeutung und Bestimmung von ω

Räumlicher Ursprung $x' = 0$ von \mathcal{K}' : Bahnkurve: $x = Vt$

$$0 = Vt \cosh \omega - ct \sinh \omega \Rightarrow \tanh \omega = \frac{V}{c}$$

Ergebnis: Lorentz-Transformation (x -Boost):



Bedeutung und Bestimmung von ω

Räumlicher Ursprung $x' = 0$ von \mathcal{K}' : Bahnkurve: $x = Vt$

$$0 = Vt \cosh \omega - ct \sinh \omega \Rightarrow \tanh \omega = \frac{V}{c}$$

Ergebnis: Lorentz-Transformation (x-Boost):

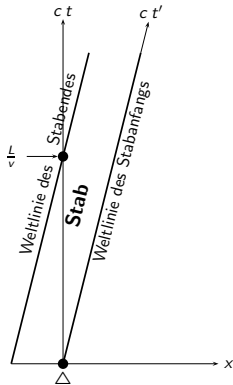
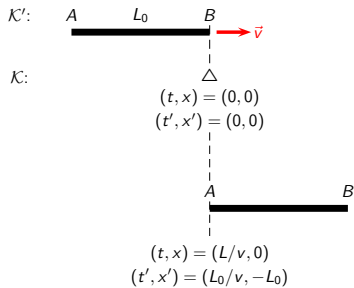
$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right); & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \\x' &= \gamma (x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{\gamma(v - V)}{dt'/dt} = \frac{\gamma(v - V)}{\gamma(1 - Vv/c^2)}$$

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}, \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

$$\omega(v/c) = \omega(v'/c) + \omega(V/c)$$

Lorentzkontraktion: 1. Version

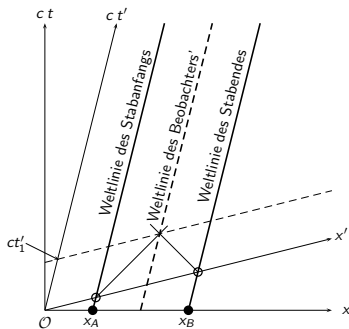


$$c^2 (L/v)^2 - 0 = c^2 (L_0/v)^2 - L_0^2$$

$$\Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Bewegter Maßstab erscheint verkürzt!

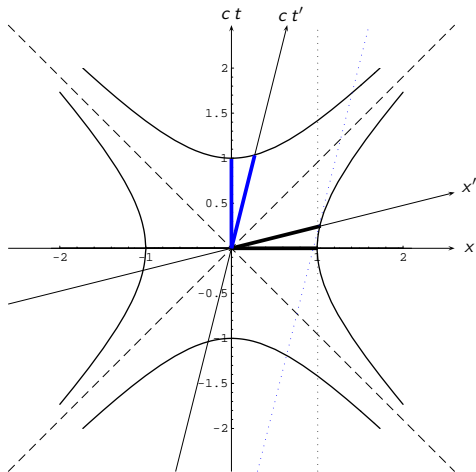
Lorentzkontraktion: 2. Version



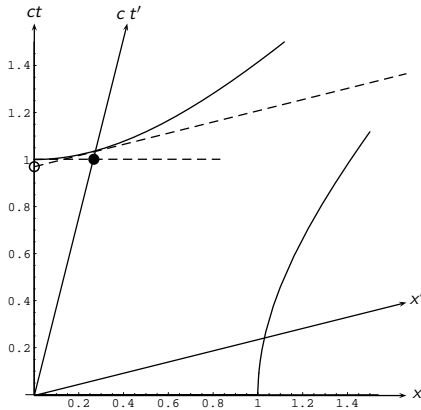
- $\mathcal{P}'_A = (ct'_1, x'_A)$: Lichtstrahl vom Stabfange A kommt an
 $\mathcal{P}'_B = (ct'_1, x'_B = x'_A + L_0)$: Lichtstrahl vom Stabende B kommt an
- $\mathcal{P}_A = (0, x_A)$: Stabfange bei x_A
 $\mathcal{P}_B = (0, x_B = x_A + L)$: Stabende bei x_B

$$L_0 = x'_B - x'_A = \gamma(v) \underbrace{(x_A - x_B - 0)}_L \Rightarrow L = L_0 / \gamma(v) = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Eichung von Uhren und Maßstäben



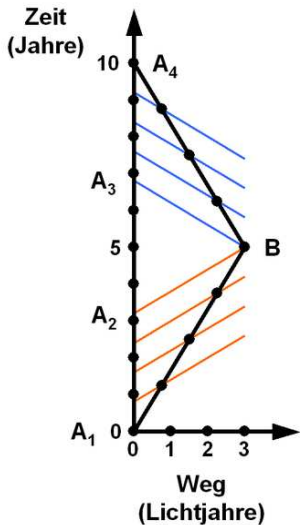
Uhr U' gleite an in \mathcal{K} ruhenden Uhren vorbei



$$T = \gamma(v) T'_0 = \frac{T'_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Bewegte Uhren gehen langsamer!

Zwillingsparadoxon



$$V = 0.6c$$

$$\gamma = 5/4$$

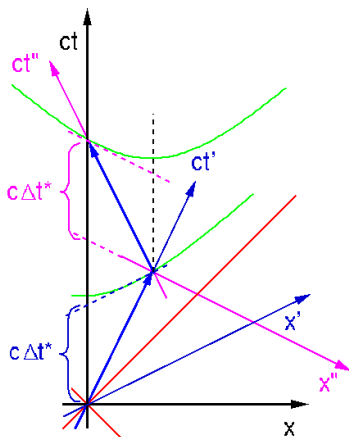
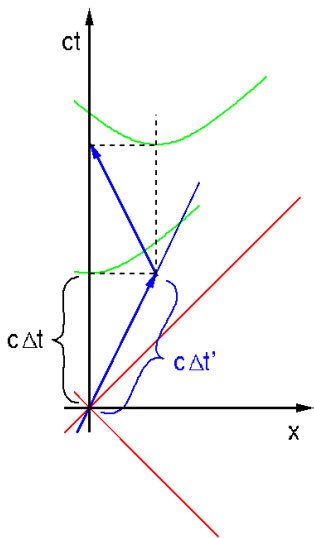
$$T_{\text{daheim geblieben}} = 10 \text{ Jahre}$$

$$T_{\text{gereist}} = 8 \text{ Jahre}$$

Zeichnung: von

<http://de.wikipedia.org/wiki/Zwillingsparadoxon>
übernommen

Zwillingsparadoxon



(Bilder von Klaus Kassner

<http://itp.nat.uni-magdeburg.de/kassner/srt/crashcourse/zwillingsparadoxon.html> übernommen.)

Was hier insbesondere nicht behandelt werden konnte
(s. Skript):

Relativistische Mechanik