3 Funktionen, Grenzwerte, Differenzialrechnung

3.1 Vorbetrachtungen

Wenn eine Kugel, die an einem Faden der Länge ℓ aufgehängt ist, im Schwerefeld $g = 9,81$ m/sec^2 der Erde aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird, so führt sie *Schwingungen* aus. Sofern die anfängliche Auslenkung nicht zu groß war und Reibungsverluste innerhalb der Beobachtungszeit vernachlässigbar klein sind, findet eine *periodische Bewegung* statt, die sich nach der Zeitdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,, \tag{1}$$

der sogenannten „Periode“, wiederholt.

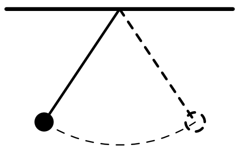

Abbildung 20: Pendel

Gleichung (1) drückt aus, wie die Periode T von der Fadenlänge ℓ und der Schwerebeschleunigung g abhängt; wir sagen T ist eine „Funktion von ℓ und g“ und schreiben $T = f(\ell, g)$. In der Physik geht es oft darum, wie eine gegebene Messgröße („Observable“) $\mathcal{O}$ von anderen Messgrößen $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2, \ldots$ oder Kontrollparametern $p_1, p_2, \ldots$ (wie etwa Druck, Spannung usw.) abhängt. Man hat es daher oft mit Abhängigkeiten der Form

$$\mathcal{O} = f(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, p_1, p_2, \ldots) \tag{2}$$

zu tun. Diese werden durch Funktionen f beschrieben. Es ist daher wichtig, den grundlegenden Begriff der „Funktion“ oder „Abbildung“ zu verstehen. Dies wird ein Thema der heutigen Vorlesung sein. Ansonsten besteht das Ziel der heutigen Vorlesung darin, Sie ein wenig mit der Differenzialrechnung vertraut zu machen. Wir wollen uns auf diesem Wege bis in die Nähe von „Differenzialgleichungen“ herantasten. Differenzialgleichungen sind Gleichungen, deren Lösungen nicht *Zahlen*, sondern *Funktionen* sind. Beispielsweise ergibt sich die Höhe $h = f(t)$ eines im Schwerefeld der Erde fallenden Balles als Lösung einer solchen Differenzialgleichung.

3.2 Zahlenfolgen und Grenzwertbegriff

3.2.1 Definitionen

Def(inition): Es sei jeder natürlichen Zahl n in eindeutiger Weise eine (hier als reell angenommene) Zahl x_n zugeordnet. Dann nennen wir

$$\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{3}$$

eine *(Zahlen-)Folge* (engl: *‘sequence’*) und x_n das n-te *Glied* (*‘nth term’*) der Folge. Beispiele:

(i) $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;

(ii) $\left\{x_n = -\frac{1}{n^2}\right\} = \{-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \ldots\}$;

(iii) $\left\{x_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1,\, \frac{1}{2},\, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Def.: Man nennt eine Folge wie (i) *streng monoton wachsend* [wie (ii) *streng monoton fallend*], wenn stets $x_m > x_n$ ($x_m < x_n$) ist, sofern $m > n$. Folgen wie (iii), bei denen die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, nennt man *alternierend.*

Bei allen 3 oben angegebenen Folgen (i)–(iii) stellen wir fest, dass sich die Glieder mit wachsendem n immer weniger von 0 unterscheiden: Die Folgen „streben offenbar gegen den Grenzwert 0“. Dieses „Streben“ bzw. der Begriff „Konvergenz gegen einen Grenzwert“ bedürfen einer präzisen mathematischen Definition.

Def.: Gegeben sei eine (reelle) Folge $\{x_n\}_n^\infty$. Wir sagen, $\{x_n\}$ konvergiert gegen den Grenzwert $\xi \in (-\infty, +\infty)$ und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \text{oder} \quad x_n \to \xi \ \text{ für } \ n \to \infty\,, \tag{4}$$

wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|x_n - \xi| < \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$.

Etwas salopp ausgedrückt bedeutet diese Definition, dass x_n *„beliebig nahe am Grenzwert ξ liegt“, wenn „n hinreichend groß“ ist.* Falls $x_n \to 0$ für $n \to \infty$, so sagt man auch, $\{x_n\}$ sei eine *Nullfolge.*

Es ist möglich, dass eine Folge $\{x_n\}$ nicht konvergiert, weil ihre Glieder x_n unbeschränkt anwachsen oder unbeschränkt fallen. Beispiele: $\{x_n = n\}$ (1. Fall, anwachsend) bzw. $\{x_n = -5n^2 + 7\}$ (2. Fall, fallend). Dies führt zu folgender Definition:

Def.: Eine Folge $\{x_n\}$ *divergiert gegen* $+\infty$ $(-\infty)$, wenn es für jede beliebig große (kleine) reelle Zahl $x > 0$ $(x < 0)$ ein $N(x) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > x$ $(x_n < x)$ für alle $n > N(x)$. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,.$$

Es kann aber auch vorkommen, dass *kein* Grenzwert existiert, obwohl die Glieder x_n betraglich beschränkt bleiben. Ein Beispiel ist $\left\{x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$. Diese Folge konvergiert nicht, weil ihre Glieder für große n zwischen Werten bei $+1$ und -1 oszillieren. Das Beispiel zeigt auch, dass eine aus den Beträgen $|x_n|$ gebildete Folge konvergieren kann (aber nicht muss), wenn $\{x_n\}$ nicht konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1. \tag{5}$$

Graphisch hat die Konvergenz einer Folge gegen den Grenzwert ξ die in Abbildung 21 illustrierte Bedeutung: Für hinreichend große n $(n > N(\epsilon))$ müssen alle Glieder x_n in einem um ξ zentrierten Streifen der Breite 2ϵ liegen.

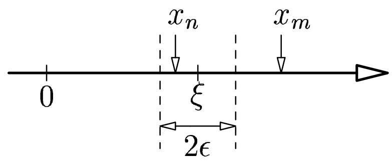

Abbildung 21: Wenn $x_n \to \xi$, dann müssen alle x_n mit $n > N(\epsilon)$ im skizzierten Streifen der Breite 2ϵ liegen. Konvergenz gegen ξ kann also nur vorliegen, wenn für das m vom eingezeichneten x_m gilt $m \leq N(\epsilon)$.

3.2.2 Die Eulersche Konstante e

Für eine gegebene Folge $\{x_n\}$ stellen sich stets zwei Fragen:

1. Ist die Folge konvergent?

2. Wenn ja, was ist ihr Grenzwert?

Die Antworten auf diese Fragen können trivial — aber auch sehr schwierig — sein.

Beispiele: Die Folge $\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\}$ mit $k > 0$ konvergiert offensichtlich: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, denn $1 + 1/n \to 1$ impliziert dies, falls $k > 0$. Dagegen divergiert die Folge $\{x_n = (1+a)^n\}$ mit $a > 0$, weil $1 + a > 1$ ist, so dass x_{n+1} um den Faktor $1 + a$ größer als x_n ist. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1+a)^n = +\infty\ . \tag{6}$$

Für die Folge $\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ist nicht sofort evident, ob — und falls ja, gegen welchen Grenzwert — sie konvergiert. Zwar strebt der Faktor $1 + 1/n$ mit wachsendem n gegen 1, aber gleichzeitig wächst der Exponent n. Tatsächlich hat die Folge einen Grenzwert. Sie konvergiert gegen die nach Leonhard Euler[1] benannte Eulersche Konstante e, eine irrationale Zahl:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818\dots\ . \tag{7}$$

Anstelle eines ausführlichen Konvergenzbeweises müssen wir uns hier in Anbetracht der zur Verfügung stehenden Zeit mit einer kurzen Diskussion der Beweisstrategie begnügen. Er besteht aus den folgenden drei Schritten: Man zeigt,

(i) dass die Folge $\{x_n = (1+1/n)^n\}$ streng monoton wachsend ist,

(ii) dass $\{y_n = (1+1/n)^{n+1}\}$ streng monoton fallend ist und

(iii) dass $x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.

Aus diesen drei Eigenschaften folgt die Behauptung leicht; y_n nähert sich e von oben und x_n von unten an.

3.3 Funktionen

3.3.1 Der Funktionsbegriff

Als nächstes wollen wir den Funktionsbegriff einführen, der von zentraler Bedeutung ist.

Def.: Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ zwei Mengen. Jedem $x \in \mathcal{D}_f \subset \mathcal{M}$ sei eindeutig ein Element $f(x) \in \mathcal{M}'$ zugeordnet:

$$f : x \mapsto y = f(x) \in \mathcal{M}' \tag{8}$$

Wir sagen: „Die Funktion f bildet das *Argument* x in den *Funktionswert* $f(x)$ ab.“ $\mathcal{D}_f$ heißt *Definitionsbereich* (engl.: *'domain'*). Man sagt: f ist auf $\mathcal{D}_f$ definiert. Außerdem: f ist eine *Abbildung* (engl.: *'mapping'*) von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$. Geschrieben wird dies als: $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$.

Unter dem *Wertebereich* (engl: *'range'*) von f versteht man die Menge

$$\mathcal{W}_f := \{y \mid y = f(x) \text{ für } x \in \mathcal{D}_f\}\ . \tag{9}$$

Dies bedeutet: f bildet $\mathcal{D}_f$ auf $\mathcal{W}_f$ ab, was man auch durch die Schreibweise $\mathcal{W}_f = f(\mathcal{D}_f)$ und die Aussage: „$\mathcal{W}_f$ ist das *Bild* (engl.: *'image'*) von $\mathcal{D}_f$ unter der Abbildung f“, ausdrückt. Umgekehrt sagt man, dass $\mathcal{D}_f$ das *Urbild* (engl.: *'inverse image'*) von $\mathcal{W}_f$ sei. Eine Funktion heißt *reellwertig* (*komplexwertig*), wenn $\mathcal{W}_f \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $\mathcal{W}_f \subseteq \mathbb{C}$).

[1] Leonhard Euler (1707–1783), Schweizer Mathematiker, der e als Basis des natürlichen Logarithmus einführte; einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten, der zu fast allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik wichtige Beiträge geleistet hat; soll ein heiteres Wesen und 13 Kinder gehabt haben.

Man beachte: Für jedes $x \in \mathcal{D}_f$ muss es ein wohldefiniertes $y \in \mathcal{W}_f$ geben; es kann aber durchaus *mehrere* Argumente x_1, x_2, ... geben, die in ein- und dasselbe y abgebildet werden!

Def.: Wenn es zu jedem $y \in \mathcal{W}_f$ *genau ein* $x \in \mathcal{D}_f$ gibt mit $y = f(x)$, dann heißt f *eineindeutig* (engl.: *'one-to-one'*) oder *injektiv* (*injective*), was man kurz als 1-1 schreibt.

Wenn eine Funktion f 1-1 ist, dann wird durch

$$f^{-1} : \mathcal{W}_f \to \mathcal{D}_f \text{ mit } y \mapsto x = f^{-1}(y) \quad (10)$$

eine wohldefinierte Funktion, die *Umkehrfunktion* (*inverse function, inverse mapping*) von f, definiert.[2]

Beispiel: Die Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ ist nicht 1-1, weil x und $-x$ in denselben Wert x^2 abgebildet werden. Betrachtet man aber die Einschränkung dieser Funktion auf $(0, \infty)$ [oder auf $(-\infty, 0)$], so ist diese umkehrbar.

Bei einer 1-1 Abbildungen $f : x \mapsto y$ von $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ in $\mathcal{M}' = \mathbb{R}$ mit der Umkehrfunktion f^{-1} sind die Rollen von x und y bei f und f^{-1} wegen $f^{-1} : y \mapsto x$ lediglich vertauscht. Daher erhält man den Graphen der Umkehrfunktion durch Spiegelung desjenigen von $f(x)$. Dies ist für das Beispiel $f(x) = x^2$ mit $x \in (0, 1)$ in Abbildung 22 dargestellt.

Streng monotone[3] (streng monoton wachsende oder streng monoton fallende) Funktionen sind trivialerweise 1-1 und haben daher eine Umkehrfunktion. Die Definition dieser Eigenschaften ist analog zu der bei Folgen:

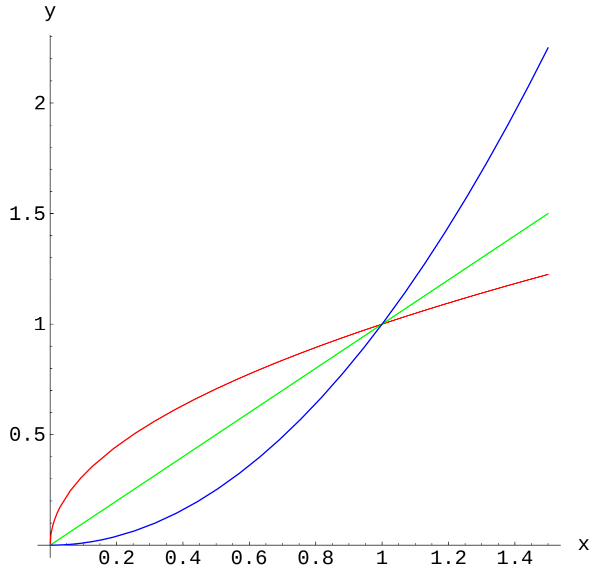

Abbildung 22: Der Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ (hier: $= \sqrt{x}$, rote Kurve) ergibt sich durch Spiegelung des Graphen von $f(x)$ (hier: $= x^2$, blaue Kurve) an der Geraden $y = x$ (grüne Linie).

Def.: Eine reellwertige Funktion f heißt *streng monoton wachsend (streng monoton fallend)*, wenn für alle x, $x' \in \mathcal{D}_f$ mit $x > x'$ stets $f(x) > f(x')$ $(f(x) < f(x'))$ gilt.

Eine wichtige Begriffsbildung, die wir brauchen werden, ist die einer *zusammengesetzten Funktion* (früher auch *mittelbare Funktion* genannt). Im Englischen spricht man von *'composite function'* oder *'composite mapping'*.

Def.: Es seien f und g Funktionen mit $\mathcal{W}_f \subset \mathcal{D}_g$. Dann kann man eine neue Funktion $h := g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{W}_g$, genannt *zusammengesetzte Funktion* (*composite function*),

[2] Bitte verwechseln Sie den Funktionswert $f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion nicht mit dem Kehrwert $[f(x)]^{-1} = 1/f(x)$!!

[3] engl.: *strictly monotonic*, *nicht* 'monotonous' (= eintönig)!

durch

$$h = g \circ f : x \mapsto g[f(x)] \qquad (11)$$

definieren ($g \circ f$: sprich „g nach f“.)

Die Wirkung von h ist in Abbildung 23 illustriert: Die Funktion f bildet $x \in \mathcal{D}_f$ in $y = f(x) \in \mathcal{W}_f \subset \mathcal{D}_g$ ab. Dieses wird durch g weiter in $z = g(y) = g(f(x)) = h(x) \in \mathcal{W}_g$ abgebildet.

Ein Beispiel für eine in der Physik vorkommende zusammengesetzte Funktion kennen Sie alle: Der Betrag der Kraft F der Sonne auf die Erde hängt von deren Abstand R_{SE} ab, der seinerseits sich im Laufe der (Jahres-)Zeit t ändert. Daher ist F eine zusammengesetzte Funktion der Form $F = f(R_{\mathrm{SE}}(t))$.

3.3.2 Ergänzung: die zyklometrischen Funktionen

Wichtige Beispiele für Umkehrfunktionen sind die sogenannten *zyklometrischen* oder *inversen trigonometrischen Funktionen.* Diese werden in der Physik häufig benötigt. Wir ergänzen daher hier die Vorlesung, indem wir kurz auf sie eingehen.

Die folgenden Funktionen sind auf den angegebenen Definitionsgebieten[4] jeweils eineindeutig:

$$\begin{aligned}
f_1 &: \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to [-1,1] \text{ mit } x \mapsto \sin x\ , \\
f_2 &: [0,\pi] \to [-1,1] \text{ mit } x \mapsto \cos x\ , \\
f_3 &: \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \tan x\ , \\
f_4 &: (0,\pi] \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } x \mapsto \cot x\ .
\end{aligned} \qquad (12)$$

Die zugehörigen Umkehrfunktionen sind die zyklometrischen oder inversen trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1^{-1} &= \arcsin : x \in [-1,1] \mapsto \arcsin x\ , \\
f_2^{-1} &= \arccos : x \in [-1,1] \mapsto \arccos x\ , \\
f_3^{-1} &= \arctan : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan x\ , \\
f_4^{-1} &= \operatorname{arccot} : x \neq 0 \mapsto \operatorname{arccot} x\ ,
\end{aligned} \qquad (13)$$

die in den Abbildungen 24–27 dargestellt sind.

Mit Hilfe der Arkustangensfunktion können wir das Argument $\arg z$ einer im ersten Quadranten liegenden komplexen Zahl $z = x + iy$ nun explizit durch $\operatorname{Re} z = x$ und $\operatorname{Im} z = y$ ausdrücken:

$$\arg z = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\ . \qquad (14)$$

Für in den anderen Quadranten liegende komplexe Zahlen gelten ähnliche Resultate, die Sie sich sicher selber leicht überlegen können.

Beachten sie, dass die inversen trigonometrischen Funktionen nur auf Teilintervallen die Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen sind. Gleichungen wie $x = \arccos(\cos x)$ gelten

[4] Wir geben hier als Menge $\mathcal{M}'$, in die abgebildet wird, gleich den entsprechenden Wertebereich $\mathcal{W}_{f_i}$ an, auf dem f_i^{-1} definiert ist. Mit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das Komplement der beiden Mengen $\mathbb{R}$ und $\{0\}$ gemeint, also die Menge $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0\}$.

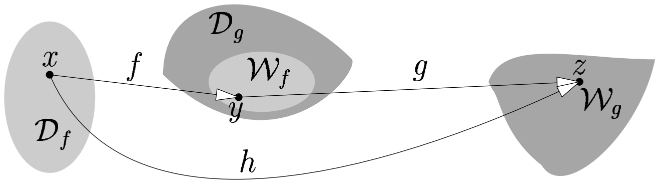

Abbildung 23: Veranschaulichung der zusammengesetzten Funktion $h = g \circ f$.

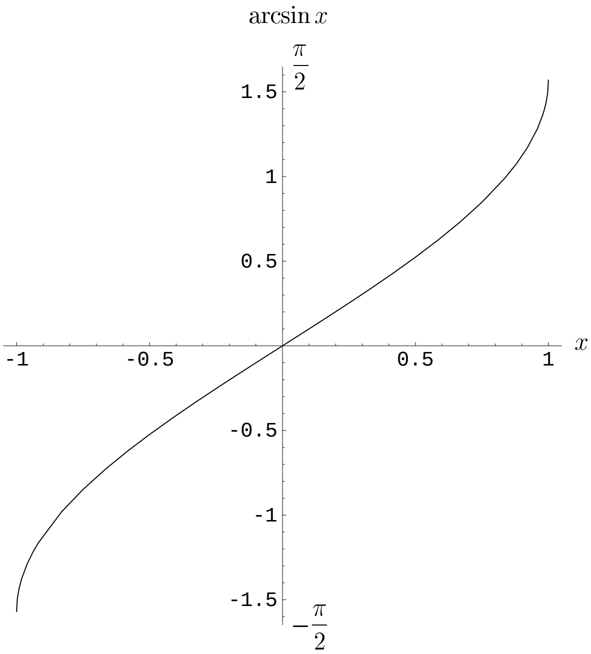

Abbildung 24: Die Arkussinusfunktion

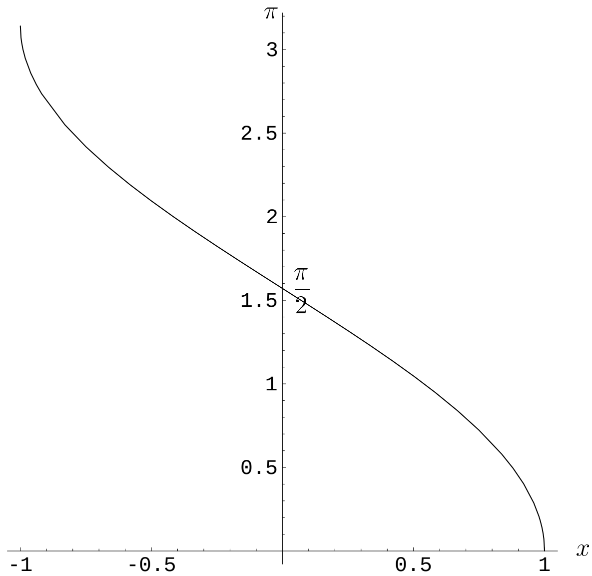

Abbildung 25: Die Arkuskosinusfunktion

daher nur für $x \in [0, \pi]$; so ist beispielsweise $\arccos(\cos 10) = 4\pi - 10$ und $\arctan(\tan 10) = 10 - 3\pi$.

3.3.3 Klassifikation von Funktionen

Man unterscheidet

a) *rationale Funktionen:* Bei diesen ergibt sich $f(x)$ aus x und ganzen Zahlen durch endlich viele Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen;[5]

b) *ganz rationale Funktionen:* analog zu a), aber unter Ausschluss der Division;

c) *gebrochen rationale Funktionen:* rationale Funktion, die nicht ganz rational ist;

d) *algebraische Funktionen:* $f(x)$ ist Lösung $y = f(x)$ einer algebraischen

[5]Dabei darf x auch mit sich selbst multipliziert werden

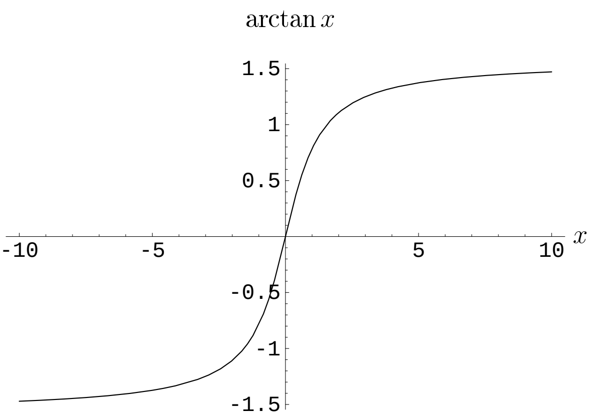

Abbildung 26: Die Arkustangensfunktion

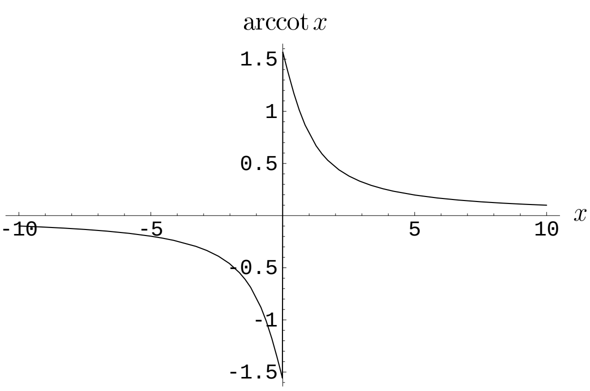

Abbildung 27: Die Arkuskotangensfunktion: Diese strebt gegen $-\infty$ $(+\infty)$, wenn man sich von negativen (positiven) x kommend an 0 annähert.

Gleichung der Form

$$F(x, y) = 0\ . \tag{15}$$

Damit gemeint ist, dass $F(x, y)$ ein Polynom in x und y ist (d.h. bei festem x ein Polynom in y und umgekehrt) und in y mindestens von erstem Grad ist. Diese schließen die rationalen Funktionen ein;

e) *transzendente Funktionen:* Funktionen, die nicht algebraisch sind.

Erläuterungen: *Ganz rationale* Funktionen sind *Polynome*; ein Polynom $P(x)$ n-ten Grades läßt sich in der *Normalform*

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{16}$$

mit $a_n \neq 0$ schreiben, wobei alle Koeffizienten a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ganze Zahlen sind. *Gebrochen rationale* Funktionen sind von der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\ , \tag{17}$$

wobei P und Q Polynome sind und $Q(x)$ nicht als Faktor in $P(x)$ auftritt (also nicht „gekürzt“ werden kann).

Beispiele:

$$P(x) = 3x^2 + 9x - 7 \tag{18}$$

ist eine ganz rationale Funktion, und zwar ein Polynom 2. Grades. Dagegen ist die für $x \neq 2$ definierte Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x - 6} \tag{19}$$

eine gebrochen rationale. Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \tag{20}$$

ist Lösung der algebraischen Gleichung (15) mit

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + 3\ , \tag{21}$$

und damit eine algebraische Funktion. Beispiele für transzendente Funktionen sind $\sin x$ und $\cos x$.

3.3.4 Die Exponentialfunktion

Eine wichtige Klasse transzendenter Funktionen, die Sie brauchen werden, sind die *Exponentialfunktionen*. Das sind Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto a^x \text{ für } a > 0\ . \qquad (22)$$

Wir begnügen uns zunächst mit dem Fall, dass $x \in \mathbb{R}$ ist und nehmen an, dass $a > 0$. In Kapitel 3.5.3 werden wir später eine Verallgemeinerung auf komplexe Argumente vornehmen.

Für beliebiges $x \in \mathrm{R}$ muss $y = a^x$ aber erst noch definiert werden. Dies tun wir, indem wir zunächst a^x für beliebige rationale Zahlen definieren, und zwar

a) für $x = p \in \mathbb{Z}$: so wie in Gleichung[6] (II.41) schon für beliebige $a \in \mathbb{C}$ definiert. Bitte beachten: Für $p \in \mathbb{N}$ ist sogar $a = 0$ als Basis zulässig, und es gilt $0^p = 0$.

b) für $x = 1/q$ mit $q \in \mathbb{N}$ durch: $y = a^{\frac{1}{q}}$ mit $a \geq 0$ ist diejenige Zahl, für die $y^q = a$.

c) für $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ durch: $a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Dass es für $a > 0$ genau eine durch b) definierte reelle Zahl $a^{\frac{1}{q}} > 0$ gibt, sieht man wie folgt[7]:

1. Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei Werte $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ mit $(y_1)^q = (y_2)^q = a$. Wegen $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ folgt aus $y_1 < y_2$ dass $y_1^q < y_2^q$; analog gilt $y_1 > y_2 \Rightarrow (y_1)^q > (y_2)^q$. Daher war die Annahme, dass $(y_1)^q = (y_2)^q = a$ falsch. Widerspruch!

2. Existenz: Wähle ganze Zahl $g \geq 0$, so dass $g^q \leq a < (g+1)^q$. Wenn „ = “ gilt, ist der Beweis erbracht. Wenn „ < “ zutrifft, dann wählen wir eine Ziffer $z_1 \in \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$, so dass
$$\left(g + \frac{z_1}{10}\right)^q \leq a < \left(g + \frac{z_1 + 1}{10}\right)^q .$$
Falls “ =" nicht gilt: Verfahren fortsetzen und Ziffer z_2 wählen, so dass
$$\left(g_n + \frac{z_n}{10^{n+1}}\right)^q \leq a < \left(g_n' + \frac{z_n+1}{10^{n+1}}\right)^q$$
mit $g_1 = g + \frac{z_1}{10}$ und $g_1' + \frac{z_1+1}{10}$ und $n = 2$. Verfahren bricht ab, wenn „ = “ gilt. Notfalls beliebig fortsetzen. Konsequenz: $(g_n)^q \leq a \leq (g_n')^q\ \forall n = 1, 2, \ldots,$ woraus $g_n \leq a^{\frac{1}{q}} \leq g_n'$ folgt. Dadurch wird $y = a^{\frac{1}{q}}$ eindeutig festgelegt.

Um die Definition c) auf beliebige reelle Zahlen x zu verallgemeinern, kann man wie folgt vorgehen: Man stellt x durch eine Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n = [r_n, r_n'] \supset \ldots$ mit $r_n, r_n' \in \mathbb{Q}$ und $\lim_{n\to\infty}(r_n' - r_n) = 0$ dar. Mit anderen Worten, es gilt

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \ldots \leq x \leq \ldots \leq r_3' \leq r_2' \leq r_1', \qquad (23)$$

was a^x durch die Intervallschachtelung

$$a^{q_1} \leq a^{q_2} \leq \ldots \leq a^x \leq \ldots \leq a^{q_2'} \leq a^{q_1'} \qquad (24)$$

[6] Gleichung (II.x) bedeutet Gleichung (x) des Skriptums zur zweiten Vorlesung.

[7] Der nachfolgende Beweis wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen weggelassen.

eindeutig festlegt. Dadurch sind die Exponentialfunktionen (22) definiert.

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion für die spezielle Wahl $a = e$:

$$\exp : x \mapsto e^x \, . \tag{25}$$

Wenn man nicht von der „allgemeinen Exponentialfunktion“ a^x redet, ist mit der Bezeichnung *Exponentialfunktion* (kurz: „e-Funktion“) stets $e^x = \exp(x)$ gemeint. Diese Funktion ist in Abbildung 28 dargestellt.

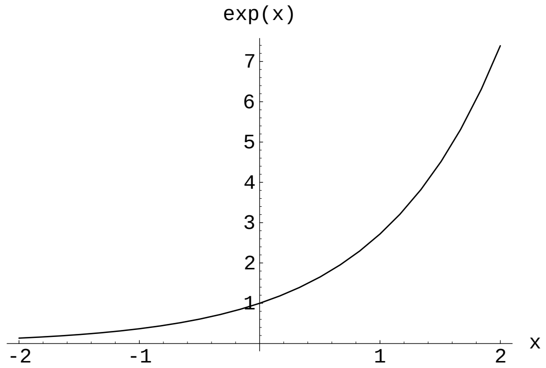

Abbildung 28: Exponentialfunktion e^x.

Für das Rechnen mit Exponentialfunktion sind folgende Regeln nützlich:

$$a^x \, a^y = a^{x+y} \, , \quad a > 0 \, , \quad x, y \in \mathbb{R} \, , \tag{26}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \, , \quad a > 0 \, , \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{27}$$

und

$$a^x \, b^x = (ab)^x \, , \quad a > 0 \, , \; b > 0 \, , \; x \in \mathbb{R} \, . \tag{28}$$

3.3.5 Der Logarithmus: die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Das folgende Teilkapitel, welches in der Vorlesung aufgrund der zur Verfügung stehenden knappen Zeit weggelassen werden musste, dient der Ergänzung.

Die Exponentialfunktionen

$$f : x \mapsto y = a^x \, , \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \, , \quad a > 0 \, , \tag{29}$$

mit $a \neq 1$ sind Beispiele für *streng monotone Funktionen.* Für sie gilt generell

$$f(0) = a^0 = 1 \, . \tag{30}$$

Je nachdem, ob $a > 1$ oder $a < 1$, sind sie *streng monoton wachsend* oder *streng monoton fallend* (vgl. Abb. 29).

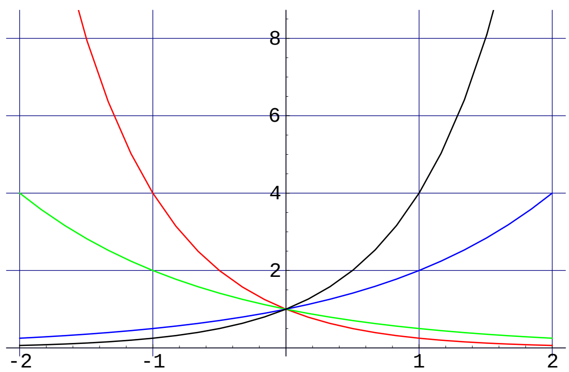

Abbildung 29: Exponentialfunktionen a^x für die Werte $a = \frac{1}{4}$ (rot), $a = \frac{1}{2}$ (grün), $a = 2$ (blau), $a = 4$ (schwarz).

Die zu f aus Gleichung (29) gehörenden Umkehrfunktionen f^{-1} schreibt man als

$$f^{-1} : y \mapsto x = \log_a y \, . \tag{31}$$

Man nennt $\log_a y$ *Logarithmus von y zur Basis (oder Grundzahl) a.* Als unmittelbare Folgen der Gleichungen (26), (27) und (30) erhält man

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \text{für} \quad & x, y > 0 \, , \; a > 1 \, , \end{aligned} \tag{32}$$

$$\log_a(x^\lambda) = \lambda \log_a x\ , \quad x > 0\,,\ a > 1\,, \tag{33}$$

sowie

$$\log_a 1 = 0\ . \tag{34}$$

Ferner folgt aus $a^1 = a$

$$\log_a a = 1\ . \tag{35}$$

Anstelle von $\log_e x$ schreibt man kurz $\log x$. Andere übliche Bezeichungen sind

$$\begin{aligned} \ln x &:= \log_e x \ (\text{„natürlicher Log.“})\ ; \\ \lg x &:= \log_{10} x \ (\text{„dekadischer Log.“})\ ; \\ \mathrm{ld}\, x &:= \log_2 x \ (\text{„dualer Log.“})\ . \end{aligned} \tag{36}$$

Der natürliche Logarithmus ist in Abbildung 30 dargestellt.

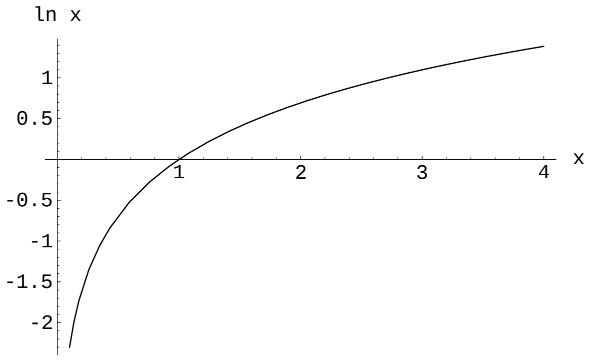

Abbildung 30: Der natürliche Logarithmus $\ln x$.

Durch das Logarithmieren $\log_b x$ von $x = a^{\log_a x}$ ergibt sich aus Gleichung (33) das Transformationsverhalten des Logarithmus bei Änderung der Basis:

$$\log_b x = \log_b a \log_a x\ . \tag{37}$$

Ein bekanntes Beispiel für das Auftreten von Exponentialfunktionen sind Wachstums- und Zerfallsprozesse.

Beispiel: Radioaktiver Zerfall einer Substanz mit Halbwertszeit $T_{1/2}$. Nach der Zeit t verbleiben von anfänglich vorhandenen $N_0 = N(t{=}0)$ Atomen

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = N_0\, e^{-t/\tau}\ , \tag{38}$$

wobei $\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \simeq \frac{T_{1/2}}{0{,}693}$. Trägt man $\ln N(t)$ als Funktion von t auf:

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \ln N_0\ , \tag{39}$$

so kann man aus der Steigung $1/\tau$ dieser Geraden τ erhalten und aus dem Ordinatenabschnitt $\ln N_0$ ablesen.

3.4 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

3.4.1 Definition des Grenzwerts

Im Kapitel 3.2 haben wir uns mit der Konvergenz von Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ beschäftigt; im Kapitel 3.3 Funktionen kennengelernt. Wir verknüpfen nun beide Elemente, indem wir uns folgender Problematik zuwenden: Wir betrachten konvergente Folgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, deren Glieder x_n ebenso wie ihr Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ im Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$ einer Funktion f liegen. f bildet die Folge $\{x_n\}$ in eine Folge $\{y_n \in \mathcal{W}_f\}_{n=1}^\infty$ im Wertebereich $\mathcal{W}_f$ von f ab. Es stellen sich nun folgende offensichtliche Fragen:

(i) Konvergiert die zur gegebenen Folge $\{x_n\}$ gehörende Bildfolge $\{y_n\}$? Wenn ja, konvergiert sie gegen das Bild $\eta = f(\xi)$ des Grenzwertes ξ?

(ii) Findet diese Konvergenz der Bildfolge nur für manche oder für alle gegen ξ konvergierenden Folgen $\{x_n\}$ statt und ist der Grenzwert stets $= \eta$?

Die folgenden einfachen Beispiele von auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen zeigen, dass es durchaus vorkommen kann, dass ein Teil dieser Fragen mit „Ja" und ein anderer mit „Nein" beantwortet werden muss:

1.) $f_1 : x \mapsto f_1(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0\,; \\ 0 & \text{für } x = 0\,; \\ +1 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$

2.) $f_2 : x \mapsto f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}\,; \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$

Im Falle von f_1 konvergiert die Bildfolge $\{f(x_n)\}$ jeder Nullfolge mit positiven Gliedern $\{x_n > 0\}$ gegen $+1$, während die Bildfolgen von Nullfolgen $\{x_n < 0\}$ mit negativen Gliedern gegen -1 konvergieren. Beide Grenzwerte ± 1 stimmen nicht mit $f(0) = 0$, dem Bild des Grenzwertes 0 dieser Folgen, überein.

Im Falle von f_2 konvergiert beispielsweise $\{f(1/n)\} \to 1$, während $\{f(\pi/n)\} \to 0$.

Diese Überlegungen legen die Definition des *Grenzwertes einer Funktion* nahe:

Def.: $f(x)$ strebt für x gegen ξ,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta\,, \tag{40}$$

wenn die Folge der Funktionswerte $\{y_n = f(x_n)\}$ für beliebige Folgen $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} = \xi$ stets gegen η konvergiert. Wir sagen $f(x)$ hat für $x \to \xi$ den Grenzwert η.

Bitte beachten: Hier wird *nicht* verlangt, dass $f(\xi) = \eta$; f müsste für $x = \xi$ *nicht einmal definiert sein*, wenn nämlich $\xi \notin \mathcal{D}_f$! Es könnte aber auch sein, dass $f(\xi)$ definiert ist und $\eta \neq f(\xi)$.

Äquivalent zur obigen Definition des Grenzwertes ist das folgende Kriterium:

Satz: Es gilt $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ genau dann, wenn es *zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass*

$$|f(x) - \eta| < \epsilon \textit{ falls } |x - \xi| < \delta\,. \tag{41}$$

Mit anderen Worten: „Es muss stets einen hinreichend schmalen δ-Streifen um ξ geben, dessen Bilder $f(x)$ innerhalb eines beliebig schmalen ϵ-Streifens fallen."

3.4.2 Stetigkeit von Funktionen

Die oben genannte Möglichkeit, dass $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ existiert, aber $\eta \neq f(\xi)$, ist ausgeschlossen, wenn die Funktion an $x = \xi$ *stetig* ist.

Def.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf einem offenen Intervall (a, b) mit $\xi \in (a, b)$ definiert. Dann heißt f *stetig* an $x = \xi$, wenn

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)\,, \tag{42}$$

und *stetig auf* (a, b), wenn es an jedem $x \in (a, b)$ stetig ist.

Die obige Funktion f_1 ist offensichtlich an allen $x \in \mathbb{R}$ ausser an $x = 0$ stetig.

3.5 Elemente der Differentialrechnung

Die Kenntnis der Differentialrechnung ist in der Physik unverzichtbar. Dies läßt sich beispielsweise schon an der Tatsache erkennen, dass in den Newtonschen Bewegungsgleichungen die Beschleunigung vorkommt. Diese ist als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit t definiert. Der Betrag der Geschwindigkeit seinerseits ist die Ableitung des zurückgelegten Weges nach t.

Im Folgenden werden die benötigten Begriffsbildungen und Ableitungsregeln kurz erläutert und zusammengestellt. Da dies Stoff ist, der üblicherweise auch in der Schule behandelt wird, wird auf eine ausführliche Darstellung und Beweise verzichtet.

3.5.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

<u>*Def.:*</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf einem offenen Intervall (a, b) mit $\xi \in (a, b)$ definiert. Der Grenzwert des in Abbildung 31 illustrierten *Differenzenquotienten* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ existiere und habe den Wert s:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = s\,. \tag{43}$$

Dann heißt f *an der Stelle* $x = \xi$ *differenzierbar*; s wird *Steigung* (engl.: *'slope'*) genannt, und man schreibt

$$s = f'(\xi) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi}\,. \tag{44}$$

Wenn $f'(x)\ \forall x \in (a, b)$ existiert, so heißt $f(x)$ auf (a, b) differenzierbar und $f' : x \mapsto f'(x)$ ihre *Ableitung(sfunktion)*.

Für höhere Ableitungen verwendet man die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2 f}{dx^2}\,, \quad f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} \\ f^{(\mathrm{iv})}(x) &= \frac{d^4 f}{dx^4}\,, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Die geometrische Bedeutung der Steigung kann man aus Abbildung 31 ablesen: Der Tangens des Winkels, den die Tangente, welche die Kurve $f(x)$ im Punkt $(\xi, f(\xi))$ berührt, mit der x-Achse bildet, ist gerade die Steigung $s = f'(\xi)$.

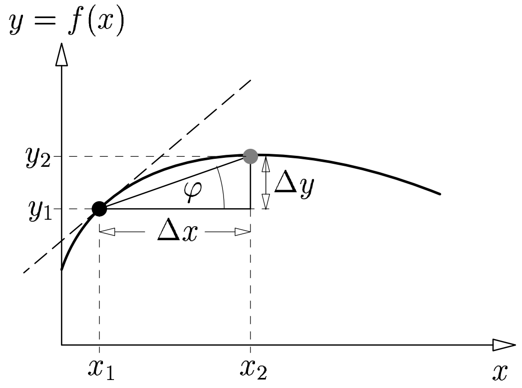

Abbildung 31: Zur Definition der Ableitung. Im Limes $\Delta x \to 0$ geht der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x = \tan\varphi$ gegen die Ableitung $f'(x_1)$.

Man macht sich leicht klar, dass die Eigenschaft „differenzierbar an ξ“ stärker als „stetig an ξ“ ist: Die Funktion $|x - \xi|$ ist an $x = \xi$ stetig, hat aber dort einen Knick, so dass sie dort nicht differenzierbar ist.[8] Andererseits läßt sich leicht beweisen, dass „Differenzierbarkeit an x“ $\Rightarrow$ „Stetigkeit an x“. (Versuchen Sie einmal, den Beweis zu führen! Dies ist wirklich nicht schwierig.)

Zur Notation ein weiterer

<u>*Hinweis:*</u> In der Physik hat man es oft mit Größen zu tun, die von mehreren Variablen abhängen. Beispielsweise hängt die Geschwindigkeit eines Teilchens i.a. von allen drei Ortskoordinaten x, y, z und der Zeit t ab. Wenn man die Ableitung einer Funk-

[8] In diesem Fall existieren die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten, wenn x sich von unten bzw. oben an ξ annähert. Man nennt diese Grenzwerte auch einseitige Ableitungen und schreibt dafür $f'(\xi - 0) = \lim_{x\to\xi-0} \Delta y/\Delta x$ bzw. $f'(\xi + 0) = \lim_{x\to\xi+0} \Delta y/\Delta x$. Für $f(x) = |x - \xi|$ gilt $f'(\xi - 0) = -1$ und $f'(\xi + 0) = +1$.

tion $f : (x, y, \dots) \mapsto f(x, y, \dots)$ z.B. nach x bildet (bei festgehaltenen anderen Variablen $y, \dots$) spricht man von einer *partiellen Ableitung* und schreibt statt $\frac{df}{dx}$ dafür

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\xi;\, y,\dots} = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x,y,\dots)-f(\xi,y,\dots)}{x-\xi} \; . \tag{46}$$

In der Vorlesung über Experimentalphysik werden Sie u.a. die Wellengleichung kennenlernen. In dieser kommen zweite partielle Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ nach x und der Zeit t vor.

3.5.2 Ableitungsregeln

Die Funktionen f und g seien an x differenzierbar. Dann gelten

a) die <u>*Summenregel:*</u> Summen von Funktionen $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ dürfen summandweise differenziert werden:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \; , \\ \frac{d(f+g)}{dx} &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \; . \end{aligned} \tag{47}$$

b) die <u>*Multiplikationsregel:*</u> Für die Ableitung eines Produkts mit einem konstanten Faktor a gilt

$$(a\,f)'(x) = a\,f'(x) \; . \tag{48}$$

c) die <u>*Produktregel*</u>: Produkte $f(x)\,g(x)$ von Funktionen leitet man ab, indem man jeweils einen der Faktoren ableitet und die Ergebnisse anschließend addiert:

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \; . \tag{49}$$

d) die <u>*Quotientenregel:*</u> Für Quotienten $f(x)/g(x)$ mit $g(x) \neq 0$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} \; . \tag{50}$$

e) Für die zusammengesetzte Funktion $h = f \circ \varphi : x \mapsto f[\varphi(x)]$ gilt unter der Voraussetzung, dass die Ableitungen $f'(y)$ bei $y = \varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ existieren, die <u>*Kettenregel (chain rule):*</u>

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(x) &= f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \; , \\ \frac{df[\varphi(x)]}{dx} &= \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} \; . \end{aligned} \tag{51}$$

f) die <u>*Ableitungsregel für die Umkehrfunktion:*</u>

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}} \; , \tag{52}$$

was sich verkürzt — aber in der gut zu merkenden Form — als

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \tag{53}$$

schreiben läßt.

In der zweiten Form der Gleichung (51) läßt sich die Kettenregel leicht merken: Es ist, „als habe man $\frac{df}{dx}$ mit $d\varphi$ erweitert“. Umgekehrt erkennt man die Bedeutung der Ableitung auf der rechten Seite, „indem man sich $d\varphi$ weggekürzt denkt“. (Dies sind natürlich nur ‘Eselsbrücken’, die man in ihre genaue Bedeutung übersetzen muss!)

In Tabelle 1 haben wir die Ableitungen einiger wichtiger Funktionen zusammengestellt. Die Funktion e^x hat die besondere Eigenschaft, *dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt.* Die Ableitung von $\ln x$ ergibt sich aus Gleichung (52): Mit $y = e^x$ folgt $\frac{d\ln y}{dy} = 1/[\frac{de^x}{dx}] = \frac{1}{y}$.

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$\frac{1}{x}$

Tabelle 1: Ableitungen $f'(x)$ einiger Funktionen $f(x)$.

3.5.3 Komplexe Exponentialfunktion und Eulersche Formeln

Bisher haben wir die Funktion e^x nur für reelle x definiert. Wir wollen die Definition nun auf komplexe Zahlen ausdehnen. Dies soll so geschehen, dass die uns für reelle z_1 und z_2 bekannte wichtige Eigenschaft

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{54}$$

für komplexe Werte von z_1 und z_2 erhalten bleibt. Damit dies insbesondere für $z_1 = x \in \mathbb{R}$ und $z_2 = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ gilt, wählen wir folgende Definition:

<u>*Def.:*</u> Für $z = x + iy$ wird e^z als diejenige komplexe Zahl definiert, für die

$$e^{x+iy} := e^x \left(\cos x + i \sin y\right) . \tag{55}$$

Man überzeugt sich leicht, dass mit dieser Definition Gleichung (54) gilt. Dazu muss man nur mit Hilfe der Additionstheoreme (I.21) und (I.22) zeigen, dass $e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{x_1} \left(\cos y_1 + i \sin y_1\right) e^{x_2} \left(\cos y_2 + i \sin y_2\right) = e^{x_1+x_2} \left[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right]$.

Aus der Definition (55) ergeben sich sofort die *Eulerschen Formeln:*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \, , \tag{56}$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \, , \tag{57}$$

aus denen man durch Addition bzw. Subtraktion die Umkehrformeln

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \, , \tag{58}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \, , \tag{59}$$

bekommt.

Die Additionstheoreme (I.21) und (I.22) entsprechen den Gleichungen für den Imaginär- bzw. Realteil der (viel leichter zu merkenden) komplexen Gleichung

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{i\beta} \tag{60}$$

für α, $\beta \in \mathbb{R}$. Überzeugen Sie sich selbst davon!

Ich wünsche Ihnen viel Freude am restlichen Teil des Probestudiums!