Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 3.11.2015

Blatt 2

Übung 1 (Scheinkräfte)

Betrachten Sie

a) ein rotierendes Bezugsystem $(t, \vec{r})$ mit der Metrik

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{r}^2 - 2(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r}\, dt - (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dt^2,$$

wobei $\vec{\omega}$ ein gegebener Vektor ist.

b) ein (nichtrelativistisch) beschleunigtes Bezugsystem

$$t' = t, \qquad \vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

mit dem Interval $ds^2 = dt^2 - d\vec{r}^2$ in den originellen Koordinaten $(t, \vec{r})$.

Ein Testteilchen bewegt sich auf Geodäten

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Berechnen Sie die Scheinkräfte, die im nichtrelativistischem Fall auf das Teilchen wirken, d.h. die Christoffel Symbole Γ^i_{00} und Γ^i_{0j} für $i, j = 1, 2, 3$. (Warum diese?)
(Es reicht, wenn Sie die Christoffel Symbole für kleine $\vec{\omega}$ bzw. kleine $\vec{a}$ bis zur quadratischen Ordnung entwickeln.)

Übung 2 (Eigenschaften der Christoffel-Symbole)

Zeigen Sie, dass die Christoffel-Symbole symmetrisch in den beiden unteren Indizes sind. Betrachten Sie die Transformation bei Änderung der Koordinaten. Transformieren sich die Christoffel-Symbole wie ein Tensor?
Hinweis: Betrachten Sie die Geodätengleichung in zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen und vergleichen Sie diese, indem Sie die Ableitungen der Position $u^i = dx^i/d\lambda$ vektoriell transformieren.

Übung 3 (Christoffel-Symbole in sphärischen Koordinaten)

Finden Sie, mit Hilfe einer von Ihnen bevorzugten Methode, die nicht-verschwindenden Christoffel-Symbole $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ für sphärische Koordinaten (r, θ, ϕ), für die $ds^2 = dr^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]$, d.h.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Versuchen Sie die Länge der Kurve $S = \int_p^q ds$, ausgedrückt in sphärischen Koordinaten, zu variieren. Aus den erhaltenen Euler-Lagrange-Gleichungen können sie die nicht-verschwindenden Christoffel-Symbole direkt ablesen.