UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 10.11.2015

Blatt 3

Übung 1 (Algebra der Tensoren)

a) Finden Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines symmetrischen $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ und eines anti-symmetrischen Tensors $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ in D Dimensionen.

b) Zeigen Sie, auf folgenden Beispielen, dass sich ein Produkt sowie eine Verjüngung von Tensoren bei Koordinatenänderung auch wie ein Tensor transformiert: $t_{\mu\nu} = v_\mu w_\nu$, $w_\alpha = S^{\beta}{}_{\alpha\beta}$, $M_\mu{}^\nu = P_{\mu\lambda} Q^{\lambda\nu}$.

c) Zeigen Sie, dass ein symmertrischer bzw. antisymmetrischer Tensor $t_{\mu\nu} = \pm t_{\nu\mu}$ diese Eigenschaft in allen Koordinaten besitzt, d.h. dass $t_{\mu'\nu'} = \pm t_{\nu'\mu'}$.

Übung 2 (Maxwell–Tensor)

Zeigen Sie, dass der Maxwell–Tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sich bei Koordinatenänderung wie ein Tensor transformiert (während der Term $\partial_\mu A_\nu$ alleine diese Eigenschaft nicht besitzt).

<u>Zusatz:</u> Zeigen Sie, dass die linke Seite der homogenen Maxwell–Gleichungen, $\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]}$ (total antisymmetrisch in allen drei Indizes), sich bei Koordinatenänderung wie ein Tensor transformiert.

Übung 3 (Christoffel–Symbol)

Zeigen Sie, mit Hilfe der Jacobi–Identität für die Ableitung einer Determinante

$$\partial_\alpha \det g = \det g \cdot g^{\mu\nu} \cdot \partial_\alpha g_{\mu\nu}$$

dass sich die Komponenten des verjüngten Christoffel–Symbols als

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \mu\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_\alpha \sqrt{\det g}$$

darstellen lassen.