

# Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 17.11.2015

## Blatt 4

### Übung 1 (Kovariante Wellengleichung)

Bringen Sie die kovariante Wellengleichung  $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0$  in die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$$

sowie die kovariante Stromerhaltungsgleichung  $\nabla_\mu j^\mu = 0$  in die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} j^\mu) = 0.$$

In beiden Fällen ist der metrischer Zusammenhang anzunehmen.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung der Christoffel-Symbole  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \mu \alpha \end{smallmatrix} \right\}$  aus Aufgabe 3, Blatt 3.

### Übung 2 (Kovarianter Maxwell-Tensor)

Der Maxwell-Tensor wird kovariant als  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$  definiert, wobei  $A_\mu$  das elektromagnetische Vektor-Potential ist und  $\nabla_\mu$  die kovariante Ableitung (mit metrischem Zusammenhang). Zeigen Sie, dass gleichzeitig  $F_{\mu\nu}$  in beliebigen Koordinaten nur mit Hilfe von partiellen Ableitungen

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dargestellt werden kann. (Hinweis: benutzen Sie die Eigenschaften der Christoffel-Symbole.)

Zeigen Sie dann, dass die kovariante Form der inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

und die kovariante Form der homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0$$

(total antisymmetrisch in allen drei Indizes) entsprechend als

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = 4\pi j^\nu$$

und

$$\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0$$

dargestellt werden können.

### Übung 3 (Darstellung der Christoffel-Symbole)

Zeigen Sie, dass aus der kovarianten Konstanz des metrischen Tensors

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

für den metrischen Zusammenhang die Darstellung der Christoffel-Symbole

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

folgt.

Hinweis: metrischer Zusammenhang hat die Komponenten  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu \nu \end{smallmatrix} \right\}$  und ist in den beiden unteren Indizes symmetrisch!