UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 24.11.2015

Blatt 5

Übung 1 (Ableitung des Energie-Impuls-Tensors aus der Wirkung)

Die kovariante Wirkung

a) für das Skalarfeld hat die Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi, \qquad (\nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi),$$

b) für das elektromagnetische Feld hat die Form

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|g|}\, F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}, \qquad (F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha)$$

wobei g die Determinante von $g_{\alpha\beta}$ ist. Berechnen Sie in beiden Fällen den Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$ mit Hilfe der Variations-Formel

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie die Formel $\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\, g_{\alpha\beta}\, \delta g^{\alpha\beta}$.

Übung 2 (Energie-Impuls Tensor)

Der Energie-Impuls Tensor

a) für das Skalarfeld

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \partial_\gamma \phi\, \partial^\gamma \phi$$

b) für das elektromagnetische Feld

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F_\beta{}^\gamma - \frac{1}{4}\, g_{\alpha\beta}\, F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$$

erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0.$$

Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die entsprechenden Felder, d.h. die kovariante Wellengleichung $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi = 0$ und die kovarianten Maxwell-Gleichungen $\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$, her.

<u>Hinweis:</u> Da aus den Gleichungen $\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$ (antisymmetrisiert in allen drei Indizes) für die Existenz des Vektorpotentials A_α auch die kovariante Form folgt $\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$, benutzen Sie diese in b).

Bitte wenden! ↘

Übung 3 (Kovariante Elektrodynamik)

Betrachten Sie die Maxwell-Gleichungen $\nabla_a F^{ab} = j^b$ in sphärischen Koordinaten (t, r, θ, ϕ), in welchen die Metrik die folgende Form annimmt

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ & & & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Leiten Sie zunächst die kovariante Kontinuitätsgleichung für j^a ab und finden Sie die erhaltene Ladung Q.

(b) Lösen Sie diese Maxwell-Gleichungen für eine Punktladung mit der Stromdichte $j^0 = Q\,\delta^3(x)$, $j^i = 0$. Suchen Sie nach sphärisch symmetrischen elektrischen Feldern $\vec{E}(r)$, wobei $E^i = F^{0i}$ (und $F^{ik} = \epsilon^{ikl} B_k = 0$).

(c) Wie sieht das dazugehörige elektrische Potential $\Phi(r)$ aus und welche kovariante Gleichung erfüllt es?

Hinweis: Die Integration der Distribution $\delta^3(x)$ um den Punkt $\vec{x} = 0$ lässt sich nicht direkt in den sphärischen Koordinaten durchführen, da sie dort singulär sind ($\det g_{ab} = 0$). Dazu kann man zu kartesischen Koordinaten wechseln.