

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 1.12.2015

Blatt 6

Übung 1 (Krümmung der Sphäre und des Zylinders)

Berechnen Sie die Riemann und Ricci-Tensoren und den Ricci-Skalar für folgende zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten

- a) Zylinder mit Koordinaten ϕ, z ($\rho = \text{const}$) und mit der Metrik

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Sphäre mit Koordinaten θ, ϕ ($r = \text{const}$) und mit der Metrik

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Sind diese Flächen gekrümmt oder flach? Wie läßt sich diese Frage ohne diese Rechnung beantworten?

Übung 2 (Riemann und Ricci Tensoren)

Der Riemann-Tensor besitzt folgende Symmetrien:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}$$

$$R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} = 0 \quad (\Leftarrow R_{[abc]d} = 0)$$

Berechnen Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten in N Dimensionen.
Zeigen Sie, dass der Ricci-Tensor $R_{ac} := R_{abcd} g^{bd}$ symmetrisch ist.