UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 8.12.2015

Blatt 7

Übung 1 (Ideale Flüssigkeit)

Der Energie-Impuls Tensor für eine ideale Flüssigkeit mit Vierer-Geschwindigkeitsdichte u^α, Massendichte ρ und Druck p hat die Form

$$T_{\alpha\beta} = (p+\rho)\, u_\alpha u_\beta - p\, g_{\alpha\beta},$$

wobei $u^\alpha u_\alpha = 1$. Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ die Bewegungsgleichungen für die Felder ρ und u^α ab, d.h. die kovariante Kontinuitäts- und Euler-Gleichung. Vergleichen Sie diese mit deren nichtrelativistischen Versionen.

Übung 2 (Einstein-Hilbert Wirkung)

Bei der Variation der Einstein-Hilbert Wirkung $S = \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ scheint die Variation des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$ der rechnerisch aufwendigste Schritt zu sein. Glücklicherweise verschwindet das Integral

$$\int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0,$$

weil der Integrand als vollständige Divergenz dargestellt werden kann. Zeigen Sie das.
<u>Hinweis:</u> Aus dem Äquivalenz-Prinzip wissen wir, dass man Koordinaten wählen kann, in denen an einem gewissen Punkt x^a alle Christoffel-Symbole verschwinden. Man kann die ganze Rechnung an diesem Punkt durchführen und das Endergebnis wird immer noch allgemein kovariant gelten.

Variieren Sie zuerst den Ricci-Tensor

$$R_{ac} = \partial_b \Gamma^b_{ac} - \partial_a \Gamma^b_{bc} + \Gamma^b_{ac}\Gamma^d_{bd} - \Gamma^d_{ba}\Gamma^b_{dc}$$

bezüglich der Christoffel-Symbole (d.h. stellen Sie δR_{ac} mit Hilfe von $\delta\Gamma^a_{bc}$ dar) und nutzen Sie aus, dass an dem uns interessierenden Punkt $\Gamma^a_{bc} = 0$ gilt. Ersetzen Sie dann die partiellen Ableitungen durch die kovarianten (da $\Gamma^a_{bc} = 0 \Rightarrow \partial_a = \nabla_a$).

Berechnen Sie jetzt die Variation $\delta\Gamma^a_{bc}$ bezüglich der Metrik. Ersetzen Sie hier auch ∂_a mit ∇_a und nutzen Sie die Eigenschaft $\nabla_a g_{bc} = 0$ (aber nicht $\nabla_a \delta g_{bc} = 0$!).

Setzen Sie dann die variierten Christoffel-Symbole in den Ausdruck für den variierten Ricci-Tensor und zeigen Sie, dass gilt

$$\delta R_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd} \nabla_a \nabla_c \delta g_{bd} - \frac{1}{2} g^{bd} \nabla_b \nabla_d \delta g_{ac} + g^{bd} \nabla_b \nabla_{(c} \delta g_{a)d}.$$

Im letzten Schritt zeigen Sie, dass

$$g^{ac} \delta R_{ac} = \nabla_a v^a$$

mit einem Vektor-Feld v^a gilt, welches aus den Tensoren $g_{bc}, \delta g_{bc}$ und deren Ableitungen gebildet ist.