Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 18.12.2018

Blatt 10

Übung 1 (Gravitationswellen – typische Amplituden)

Die Gravitationswellen (betrachtet als Störungen der Metrik $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$) von einer kompakten sehr weit entfernten Quelle können näherungsweise als

$$h_{ij} \sim \frac{G}{c^4} \frac{2\ddot{I}_{ij}}{r}$$

dargestellt werden, wobei $I_{ij} = \int (x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\vec{x}^2) d^3x$ den Quadrupol-Moment der Massenverteilung darstellt und r der Abstand zu der Quelle ist. Betrachen Sie ein binäres System, in dem zwei Neutronsterne mit Massen m_1, m_2 um sich herum in dem Abstand R mit der Frequenz Ω orbitieren. Der Quadrupol-Moment Tensor reduziert sich dann zu

$$I_{ij} = \mu(x_i x_j - \frac{1}{3} R^2 \delta_{ij})$$

mit $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Parametrisieren Sie die Bahnen der Neutronsternen z.B. mit $x_1 = R\cos(\Omega t), x_2 = R\sin(\Omega t)$ und berechnen Sie die Größenordnungen der Wellenamplituden h_{ij} für folgende Parameter

$$m_1 = m_2 = 2.8 M_\odot, \qquad \Omega = 1/(100s), \qquad r = 100 \text{ megaParsecs}.$$

(R kann aus dem Keplerschen Gesetz durch M und Ω ersetzt werden.) Setzen Sie alle Einheiten ein und finden Sie die dimensionslose Werte von h_{ij}. Vergleichen Sie diese mit 1.

Übung 2 (Energieabstrahlung durch Gravitationswellen in binärem System)

Betrachten Sie nochmal das binäre System aus der Übung 1. Der Energieverlust wird durch

$$-\frac{dE}{dt} = P = \frac{G}{45c^5} \frac{d^3 I^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3}$$

beschrieben. Drücken Sie die Energie des Systems $E(t)$ (kinetische + potentielle) und die Strahlungsleistung $P(t)$ als Funktionen von nur $R(t)$ (Abstand zwischen der beiden Sternen) aus. Integrieren Sie die daraus resultierende gewöhnliche Differentialgleichung für $R(t)$ mit der Anfangsbedingung $R(0) = R_0$. Finden Sie die Verschmelzungszeit T, bei der $R(T) = 0$ ist. Skizzieren Sie $R(t), \Omega(t)$ und $P(t)$.

Hinweis: : Betrachten Sie die Parameter $R(t)$ und $\Omega(t)$ als langsam veränderlich in der Zeit, so dass ihre Zeitabhängigkeit für die Berechnung von P keine Rolle spielt (in anderen Worten, soll P eine Funktion von Ω und R sein, aber nicht von deren Ableitungen). Erst ab der Gleichung $dE/dt = P$ betrachten Sie die Parameter $R(t)$ und $\Omega(t)$ als zeitabhängig. Dies entspricht einer Art von adiabatischer Näherung, in der die Änderung der Bahnparameter viel langsamer ist als die Umlaufzeit in dem binärem System. (Formal $dR/dt \ll R/t$ und $d\Omega/dt \ll \Omega/t$)