Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 8.01.2019

Blatt 11

Übung 1 (Regularität des Raumes)

Betrachten Sie folgende 2-dimensionale Räume mit der Metrik

a) $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$

b) $ds^2 = \frac{1}{\rho}\, d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$

c) $ds^2 = \frac{1}{\rho^2}\, d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$

Jede dieser Metriken ist formal singulär bei $\rho = 0$, was noch nicht bedeutet, dass der Raum (als Mannigfaltigkeit) dort auch singulär ist. Untersuchen Sie die Eingenschaften der Räume in der Umgebung von $\rho = 0$ indem Sie folgendes überprüfen:

1) Berechnen Sie die Skalare $R, R_{ab}R^{ab}$ und $R_{abcd}R^{abcd}$. Sind sie bei $\rho \to 0$ endlich?

2) Überprüfen Sie dabei, ob der Punkt $\rho = 0$ zu dem Raum gehört! Zu diesem Zweck berechnen Sie den geodätischen Abstand $S = \int_{\rho=0}^{\rho_0} ds$ von einem beliebigen Punkt $\rho_0 > 0$ zum Punkt $\rho = 0$. Ist dieser Abstand endlich?

Wenn mindestens eins der obigen Skalare bei $\rho = 0$ unendlich ist und der Punkt $\rho = 0$ zu dem Raum gehört (endlicher Abstand), kann man von einer Raumsingularität sprechen. Sonst hadelt es sich wahscheinlich um eine Koordinatensingularität.

Übung 2 (Koordinaten-Singularität)

Manchmal ist die Metrik, betrachtet als Tensor-Feld $g_{ab}(x)$ auf der durch die Koordinaten x^a parametrisierten Mannigfaltigkeit, für gewisse Werte dieser Koordinaten singulär. Zum Beispiel die Sphäre, parametrisiert mit zwei Winkel-Koordinaten θ, ϕ, hat die Metrik $g_{ab}dx^a dx^b = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$, welche auf den Polen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ singulär ist (Determinante $g = 0$). Es ist aber klar, dass die Sphäre an diesen Punkten genauso regulär ist, wie an allen anderen. Die Singularität ist nur ein scheinbarer Effekt der "schlechten" Koordinaten, der durch Einführung anderer Koordinaten θ', ϕ' (mit anderen Pol-Stellen) aufgelöst werden kann. Manchmal kann sogar ein weiterer Teil der Mannigfaltigkeit hinter der Singularität entdeckt werden.

a) Betrachten Sie die Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{t^4}\, dt^2 - dx^2$$

für $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$. Sie scheint eine Singularität bei $t = 0$ zu besitzen ($|g| = \infty$). Finden Sie eine Koorditanen-Transformation $(t, x) \to (t', x')$, die diese Metrik in die Form

$$ds^2 = dt'^2 - dx'^2$$

bringt. Kann die Koordinate t' durch die Singularität $t = 0$ auf ein größeres Gebiet erweitert werden?

Bitte wenden! ↘

b) Betrachten Sie die Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx^2$$

für $-\infty < x < \infty$. Diese Metrik ist singulär in Unendlichkeit und die Koordinate x deckt nicht die ganze Mannigfaltigkeit! Die Unendlichkeiten $x = \pm\infty$ liegen im endlichen Abstand von $x = 0$. Berechnen Sie diese Abstände $L_\pm = \int_0^{\pm\infty} ds$. Führen Sie eine neue Koordinate x' ein, die die Metrik in die Form $ds^2 = dx'^2$ bringt. Läßt sich die Koordinate über ihren Definitionsbereich erweitern?

c) **Rindler-Metrik.** Betrachten Sie die Metrik

$$ds^2 = x^2 dt^2 - dx^2$$

für $-\infty < t < \infty, 0 < x < \infty$. Sie scheint eine Singularität bei $x = 0$ zu besitzen ($|g| = 0$). Können Sie auch hier eine Koorditanen-Transformation $(t, x) \to (t', x')$ finden, die diese Metrik in die Form

$$ds^2 = dt'^2 - dx'^2$$

bringt? Versuchen Sie die Null-Geodäten zu finden und diese mit den Parametern u, v zu paremetrisieren (d.h. zu jedem $u = const$ gehört eine "auslaufende" Geodäte und zu jedem $v = const$ eine "ankommende"). Benutzen Sie (u, v) als neue Koordinaten und bringen Sie die Metrik in die Form $ds^2 = F(u)\, G(v)\, du\, dv$. Durch Substitution finden Sie neue Koordinaten (U, V), so dass $ds^2 = dU\, dV$. Der letze Schritt ist $t' = (V + U)/2, x' = (V - U)/2$. Berechnen Sie immer die Bereiche, auf diesen die jeweiligen Koordinaten definiert sind. Welches Gebiet der Ebene überdecken die Koordinaten $(t'x')$? Läßt es sich erweitern? Falls ja, dann handelt es sich um eine Koordinaten-Singularität bei $x = 0$.

Zusätzlich: Sie können den Krümmungs-Tensor an den singulären Stellen berechnen und daraus Koordinaten-Invarianten bilden (wie $R, R_{ab}R^{ab}, R_{abcd}R^{abcd}$, etc.). Wenn alle diese Invarianten regulär sind, handelt es sich höchstwahrscheinlich um eine Koordinaten-Singularität.

Übung 3 ($*$ Weihnachtsbaum)

Wie viel beträgt das Integral der Skalar–Krümmung über die gesamte Weihnachtsbaum-Fläche?

$$\int_{\text{⅄}} R \sqrt{g}\, d^2x$$

(ohne den Stern; mit der Annahme, dass die Oberfläche glatt und (auch von unten) geschlossen ist, d.h. insgesamt topologisch einer Sphäre äquivalent ist)

Hinweis: : s. Gauß–Bonnet Theorem