Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 22.01.2019

Blatt 13

Übung 1 (Maximal symmetrische 3D-Räume – Metrik)

In einem maximal symmetrischen Raum gilt

$$R_{ij} = 2k\gamma_{ij},$$

wobei R_{ij} der Ricci-Tensor ist, γ_{ij} die Metrik und k eine beliebige Konstante. Nehmen Sie eine allgemeine Form der 3-dimensionalen, sphärisch symmetrischen, riemannschen Metrik an

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

und mit Hilfe der obigen Gleichungen bestimmen Sie die Funktion $\beta(r)$.
(Hinweis: Es reicht die Gleichung für die “rr”-Komponente zu betrachten.)

Übung 2 (Maximal symmetrische 3D-Räume – Topologie)

Betrachten Sie maximal symmetrische 3-dimensionale Räume mit der Metrik

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2, \qquad d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2,$$

wobei sich drei Fälle topologisch unterscheiden

a) $k = 0$: flacher Raum,
b) $k = +1$: topologisch Äquivalent zu einer 3-Sphäre,
c) $k = -1$: hyperbolischer Raum.

Finden Sie (in allen drei Fällen) Koordinatentransformationen $r = r(\rho)$, die die Metrik in folgende Form bringen

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + r(\rho)^2 d\Omega^2.$$

Berechnen Sie die Flächen $A(\rho)$ der 2-Sphären für $\rho = const$ und vergleichen Sie die drei Fälle $k = 0, \pm 1$. Wie schnell wächst $A(\rho)$ mit ρ?

*) Betrachten Sie eine Einbettung des 3-dimensionalen Raumes in 4 Dimensionen, gegeben durch

$$x = r(\rho)\sin\theta\cos\phi, \quad y = r(\rho)\sin\theta\sin\phi, \quad z = r(\rho)\cos\theta, \quad u = \sqrt{1-kr(\rho)^2}$$

Zeigen Sie, dass $d\sigma^2 = k\, du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Finden Sie eine (algebraische) Zwangsbedingung in der Form $F(u, x, y, z) = 0$, die den eingebeteten 3-dimensionalen Raum als Hyperfläche in 4 Dimensionen definiert. Können die Namen *flach, 3-Sphäre, hyperbolisch* dadurch erklärt werden?

Übung 3 (Friedmann Gleichung)

Lösen Sie die Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot a(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

in drei Fällen

a) Staub: $\rho(t) = Ca(t)^{-3}$ mit $k = 0, \pm 1$, $\Lambda = 0$
b) Strahlung: $\rho(t) = Ca(t)^{-4}$ mit $k = 0, \pm 1$, $\Lambda = 0$
c) Kosmologische Konstante $\Lambda \neq 0$: $\rho(t) = 0$ mit $k = 0, \pm 1$ für $\Lambda > 0$ und $k = -1$ für $\Lambda < 0$.

Skizzieren Sie die Lösungen $a(t)$.
<u>Hinweis:</u> in a) versuchen Sie Substitution $a(t) = C(\cos b(t) - 1)$ bei $k = 1$ bzw. $a(t) = C(\cosh b(t) - 1)$ bei $k = -1$.