UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 29.01.2019

Blatt 14

Übung 1 (Birkhoff Theorem)

a) Betrachten Sie eine allgemeine sphärisch-symmetrische Metrik

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a dx^b = e^{\nu(t,r)}dt^2 - e^{\lambda(t,r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2).$$

Berechnen Sie die Komponenten des Ricci-Tensors R_{ab}. Zeigen Sie, dass die einzige asymptotisch flache Lösung der Vakuum-Einstein-Gleichungen $R_{ab} = 0$ die statische Schwarzschild-Lösung ist

$$e^\nu = 1 - \frac{2M}{r}, \qquad e^\lambda = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass aus $R_{tr} = 0$ folgt $\dot{\lambda} = 0$, also $\lambda(t,r) = \lambda(r)$. Dann argumentieren Sie, dass aus $R_{\theta\theta} = 0$ folgt die Form $\nu(t,r) = \nu(r) + f(t)$. Die Zeit-Koordinate t kann so zu $\tilde{t}$ transformiert werden, dass $e^{\nu(t,r)}dt^2 = e^{\nu(r)}d\tilde{t}^2$. Es folgt also $\dot{\lambda} = \dot{\nu} = 0$. Nun zeigen Sie mit Hilfe von $R_{tt} = 0, R_{rr} = 0$, dass $\nu' + \lambda' = 0$ also bis auf weitere Reskalierung von $\tilde{t}$ gilt $\lambda = -\nu$. Am Ende Lösen Sie die Gleichung $R_{\theta\theta} = 0$ für $\nu(r)$ mit der Substitution $e^\nu = \alpha$. (Sie sollen eine inhomogene Diff.Gl. 1. Ordnung bekommen, die eine partikuläre Lösung $\alpha_0(r) = 1$ hat.)

b) Sind die nicht-trivialen Gleichungen (d.h. für die Komponenten $R_{tt}, R_{tr}, R_{rr}, R_{\theta\theta}$) voneinander unabhängig? (Erinnern Sie sich an die Bianchi Identitäten!)

c) Ausgedrückt in diesen Koordinaten, ist die Metrik singulär bei $r = r_S := 2M$ (in physikalischen Einheiten $r_S = 2GM/c^2$), was bedeutet, dass sie eine Lösung außerhalb eines sphärisch symmetrischen Körpers mit Radius $R > r_S$ darstellen kann. Berechnen Sie den Schwarzschild-Radius r_S für die Sonne und die Erde und vergleichen Sie diesen mit den Radien R dieser Körper.

Übung 2 (Stabile Orbits)

a) Die Radiale Koordinate r einer zeitartigen Geodäte in der Schwarzschild-Metrik erfüllt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = E$$

(τ ist die Eigenzeit), wobei das effektive radiale Potential durch

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

gegeben ist. M ist die Masse in der Schwarzschild-Metrik und L ist der erhaltene Drehimpuls des Teilchens. Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$ für verschiedene Werte von L. In welchen Bereichen ist das Potential anziehend/abstoßend? Berechnen Sie die stabilen (r_+) und instabilen (r_-) Orbits $r = const.$ (lokale Minima bzw. Maxima des Potentials). In welchen Bereichen liegen $r_\pm$ für verschiedene Werte von L? Für welche L existieren stabile Orbits $r = r_+$?

b) Leiten Sie das entsprechende Potential für die Null-Geodäten (z.B. für Photonen) her und wiederholen Sie die obige Analyse.