UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: —

Blatt 15*

Übung 1 (Relativistische Sterne)

Betrachten Sie die allgemeine sphärisch-symmetrische und statische Form der Metrik

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a dx^b = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$$

und die Einstein-Gleichungen $G_{ab} = 8\pi G\,T_{ab}$ für eine ideale Flüssigkeit, deren Energie-Impuls-Tensor in Koordinaten (t, r, θ, φ) durch

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho(r)\,e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(r)\,e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r)\,r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r)\,r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Für ein kompaktes Objekt gilt $p(r) = \rho(r) = 0$ für $r > R$. Die "Masse-Funktion" $m(r)$ wird durch die Relation

$$e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$$

definiert und ist (nach Birkhoff-Theorem) für $r > R$ konstant.

Betrachten Sie die Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen

$$m'(r) = 4\pi r^2\rho(r), \qquad \nu'(r) = 2\,G\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}, \qquad p'(r) = -G(\rho(r) + p(r))\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}.$$

Mit der Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ erhält man ein geschlossenes System von Differtialgleichungen. Dies ist mit den Anfangsbedingungen $m(0) = 0, \nu(0) = \nu_0, p(0) = p_0$ eindeutig lösbar.

Lösen Sie diese Gleichungen für eine idealisierte Zustandsgleichung $\rho(r) = \rho_0$ (konstant für alle p) für $r < R$ und $\rho(r) = 0$ für $r > R$. Die Lösungen beschreiben eine Familie von relativistischen Sternen, parametrisiert mit dem zentralen Druck p_0. Wie hängt dieser von dem Sternradius R ab? Was passiert wenn der Stern zu gross wird?

Bitte wenden! ↘

Übung 2 (Reissner-Nordström-Lösung)

Betrachten Sie die Einstein-Gleichungen $G_{ab} = 8\pi G\, T_{ab}$ für das elektromagnetische Feld F_{ab}, dessen Energie-Impuls-Tensor durch

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\right)$$

gegeben ist. Betrachten Sie die allgemeine sphärisch-symmetrische und statische Form der Metrik

$$ds^2 = g_{ab}\, dx^a dx^b = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

und des elektromagnetischen Feldes

$$F_{tr} = -F_{rt} = \phi'(r) := \partial_r\phi(r), \qquad \text{und} \qquad F_{ab} = 0$$

für alle anderen Komponenten. (Da es keine sphärisch-symmetrischen elektromagnetischen Wellen gibt, ist jede sphärisch-symmetrische Lösung automatisch statisch, wie in dem Birkhoff-Theorem.)

Lösen Sie die Einstein-Gleichungen $G_{ab} = 8\pi G\, T_{ab}$, d.h. finden Sie die Funktionen $\nu(r), \lambda(r)$ und $\phi(r)$ analog, wie in der Herleitung der Schwarzschild-Lösung. Benutzen Sie dabei die aus den Bianchi Identitäten folgenden Maxwell-Gleichungen $\nabla_a F^{ab} = 0$. (Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\nu(r) = -\lambda(r)$, dann berechnen Sie $\phi(r)$ und am Ende finden Sie $\nu(r)$.)

Zeigen Sie, dass die Reissner-Nordström-Lösung der Schwarzschild-Lösung sehr ähnlich ist, nämlich dass

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \Phi(r),$$

wobei $\Phi(r)$ nur von $\phi(r)$ abhängt. Interpretieren Sie die Integrations-Konstanten als Masse und Ladung. Welche Raumzeit ergibt sich, wenn die Ladung gleich null ist? Gibt es eine obere Grenze für den Wert der Ladung?