UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 30.10.2018

Blatt 3

Übung 1 (Christoffel–Symbol)

Zeigen Sie, mit Hilfe der Jacobi–Identität für die Ableitung einer Determinante

$$\partial_\alpha \det g = \det g \cdot g^{\mu\nu} \cdot \partial_\alpha g_{\mu\nu}$$

dass sich die Komponenten des verjüngten Christoffel–Symbols als

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \partial_\alpha \sqrt{\det g}$$

darstellen lassen.

Übung 2 (Algebra der Tensoren)

a) Berechnen Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten eines symmetrischen $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ und eines anti-symmetrischen Tensors $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ in D Dimensionen.

b) Zeigen Sie, auf folgendem Beispiel, dass sich ein Produkt und eine Verjüngung von Tensoren $P_{\mu\lambda}, Q^{\lambda\nu}$ bei Koordinatenänderung auch wie ein Tensor transformiert: $M_\mu{}^\nu = P_{\mu\lambda} Q^{\lambda\nu}$.

c) Zeigen Sie, dass ein symmertrischer bzw. antisymmetrischer Tensor $t_{\mu\nu} = \pm t_{\nu\mu}$ diese Eigenschaft in allen Koordinaten besitzt, d.h. dass $t_{\mu'\nu'} = \pm t_{\nu'\mu'}$.

d) Zeigen Sie, dass eine zweifache Verjüngung eines symmetrischen Tensors $t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu}$ mit einem antisymmetrischen Tensor $s_{\mu\nu} = -s_{\nu\mu}$, d.h. $a = t^{\mu\nu}\, s_{\mu\nu}$, verschwindet.