UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 6.11.2018

Blatt 4

Übung 1 (Maxwell–Tensor)

Zeigen Sie, dass der Maxwell–Tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sich bei Koordinatenänderung wie ein Tensor transformiert (während der Term $\partial_\mu A_\nu$ alleine diese Eigenschaft nicht besitzt). A_μ ist ein Kovektor.

Zusatz: Zeigen Sie, dass die linke Seite der homogenen Maxwell–Gleichungen, $\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0$ (total antisymmetrisch in allen drei Indizes), sich bei Koordinatenänderung wie ein Tensor transformiert.

Übung 2 (Kovariante Elektrodynamik)

Der Maxwell-Tensor wird als $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ definiert, wobei A_μ das elektromagnetische Vektor–Potential ist (genauer: Kovektor). Die kovariante Form der inhomogenen Maxwell–Gleichungen kann als

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g}\, F^{\mu\nu} \right) = 4\pi\, j^\nu$$

dargestellt werden, wobei g die Determinante der Metrik (d.h. $\det g$) bedeutet. Betrachten Sie die obigen Maxwell-Gleichungen in sphärischen Koordinaten (t, r, θ, ϕ), in den die Metrik die folgende Form annimmt

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ & & & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Leiten Sie aus den Maxwell–Gleichungen zunächst die kovariante Kontinuitätsgleichung für j^a her und finden Sie die erhaltene Ladung Q.

(b) Lösen Sie diese Maxwell-Gleichungen für eine Punktladung mit der Stromdichte $j^0 = Q\,\delta^3(x)$, $j^i = 0$. Suchen Sie nach sphärisch symmetrischen elektrischen Feldern $\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{e}_r$, wobei $E^i = F^{i0}$ (und $F^{ik} = \epsilon^{ikl} B_k = 0$).

(c) Wie sieht das dazugehörige elektrische Potential $\Phi(r)$ aus und welche kovariante Gleichung erfüllt es?

Hinweis: Die Integration der Distribution $\delta^3(x)$ um den Punkt $\vec{x} = 0$ lässt sich nicht direkt in den sphärischen Koordinaten durchführen, da sie dort singulär sind ($\det g_{ab} = 0$). Dazu kann man zu kartesischen Koordinaten wechseln.