Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 13.11.2018

Blatt 5

Übung 1 (Kovariante Wellengleichung)

Bringen Sie die kovariante Wellengleichung $\Box\phi \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0$ in die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi\right) = 0$$

sowie die kovariante Stromerhalungsgleichung $\nabla_\mu j^\mu =$ in die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g}\, j^\mu\right) = 0.$$

In beiden Fällen ist der metrischer Zusammenhang anzunehmen.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung der Christoffel–Symbole $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\}$ aus Aufgabe 1, Blatt 3.

Übung 2 (Kovarianter Maxwell–Tensor)

Der Maxwell-Tensor wird kovariant als $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ definiert, wobei A_μ das elektromagnetische Vektor–Potential ist und ∇_μ die kovariante Ableitung (mit metrischem Zusammenhang). Zeigen Sie, dass gleichzeitig $F_{\mu\nu}$ in beliebigen Koordinaten nur mit Hilfe von partiellen Ableitungen

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

dargestellt werden kann. (Hinweis: benutzen Sie die Eigenschaften der Christoffel-Symbole.)

Zeigen Sie dann, dass die kovariante Form der inhomogenen Maxwell–Gleichungen

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi\, j^\nu$$

und die kovariante Form der homogenen Maxwell–Gleichungen

$$\nabla_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0$$

(total antisymmetrisch in allen drei Indizes) entsprechend als

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \left(\sqrt{g}\, F^{\mu\nu}\right) = 4\pi\, j^\nu$$

und

$$\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]} = 0$$

dargestellt werden können.

Übung 3 (Darstellung der Christoffel–Symbole)

Zeigen Sie, dass aus der kovarianten Konstanz des metrischen Tensors

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

für den metrischen Zusammenhang die Darstellung der Christoffel–Symbole

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)$$

folgt.

Hinweis: Metrischer Zusammenhang hat die Komponenten $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}$.