

# Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 20.11.2018

## Blatt 6

### Übung 1 (Ableitung des Energie-Impuls-Tensors aus der Wirkung)

Die kovariante Wirkung

a) für das Skalarfeld hat die Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi, \quad (\nabla_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi),$$

b) für das elektromagnetische Feld hat die Form

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|g|} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}, \quad (F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha)$$

wobei  $g$  die Determinante von  $g_{\alpha\beta}$  ist. Berechnen Sie in beiden Fällen den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\alpha\beta}$  mit Hilfe der Variations-Formel

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Formel  $\delta \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$ .

### Übung 2 (Energie-Impuls Tensor)

Der Energie-Impuls Tensor

a) für das Skalarfeld

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\gamma \phi \partial^\gamma \phi$$

b) für das elektromagnetische Feld

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma} F_{\beta}{}^\gamma - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$$

erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0.$$

Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die entsprechenden Felder, d.h. die kovariante Wellengleichung  $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi = 0$  und die kovarianten Maxwell-Gleichungen  $\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0$ , her.

Hinweis: Da aus den Gleichungen  $\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$  (antisymmetrisiert in allen drei Indizes) für die Existenz des Vektorpotentials  $A_\alpha$  auch die kovariante Form folgt  $\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$ , benutzen Sie diese in b).