Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 27.11.2018

Blatt 7

Übung 1 (Krümmung der Sphäre und des Zylinders)

Berechnen Sie die Riemann und Ricci-Tensoren und den Ricci-Skalar für folgende zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten

a) Zylinder mit Koordinaten ϕ, z ($\rho = const$) und mit der Metrik

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sphäre mit Koordinaten θ, ϕ ($r = const$) und mit der Metrik

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Sind diese Flächen gekrümmt oder flach?

Übung 2 (Riemann und Ricci Tensoren)

Der Riemann-Tensor besitzt folgende Symmetrien:

$$R_{ab\,cd} = -R_{ba\,cd} = -R_{ab\,dc} = R_{cd\,ab}$$

$$R_{abc\,d} + R_{cab\,d} + R_{bca\,d} = 0 \qquad (\Leftarrow \quad R_{[abc]\,d} = 0)$$

Berechnen Sie die Anzahl der unabhängigen Komponenten in N Dimensionen (allgemein oder für N = 1, 2, 3, 4).
Zeigen Sie, dass der Ricci-Tensor $R_{ac} := R_{abcd}\, g^{bd}$ symmetrisch ist.

Übung 3 (Ideale Flüssigkeit)

Der Energie-Impuls Tensor für eine ideale Flüssigkeit mit Vierer–Geschwindigkeitsdichte u^α sowie skalare Massendichte ρ und Druck p hat die Form

$$T_{\alpha\beta} = (p+\rho)\, u_\alpha u_\beta - p\, g_{\alpha\beta},$$

wobei $u^\alpha u_\alpha = 1$. Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ die Bewegungsgleichungen für die Felder ρ und u^α her, d.h. die kovariante Kontinuitäts– $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = \ldots$ und Euler–Gleichung $(p+\rho)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = \ldots$.

Leiten Sie dann ihre nichtrelativistischen Versionen her, indem Sie $p \to p/c^2$ und $u^\mu \to (1, \vec{v}/c)$ und $x^\mu \to (ct, \vec{x})$ substituieren und nur die führende Ordnung in Potenzen von c für $|\vec{v}| \ll c$ behalten.