

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 4.12.2018

Blatt 8

Übung 1 (Einstein–Hilbert Wirkung)

Bei der Variation der Einstein–Hilbert Wirkung $S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ scheint die Variation des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$ der rechnerisch aufwendigste Schritt zu sein. Glücklicherweise verschwindet das Integral

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0,$$

weil der Integrand als vollständige Divergenz dargestellt werden kann. Zeigen Sie das.

Hinweis: Aus dem Äquivalenz-Prinzip wissen wir, dass man Koordinaten wählen kann, in denen an einem gewissen Punkt x^a alle Christoffel-Symbole verschwinden. Man kann die ganze Rechnung an diesem Punkt durchführen und das Endergebnis wird immer noch allgemein kovariant gelten.

Variieren Sie zuerst den Ricci-Tensor

$$R_{ac} = \partial_b \Gamma_{ac}^b - \partial_a \Gamma_{bc}^b + \Gamma_{ac}^b \Gamma_{bd}^d - \Gamma_{ba}^d \Gamma_{dc}^b$$

bezüglich der Christoffel-Symbole (d.h. stellen Sie δR_{ac} mit Hilfe von $\delta \Gamma_{bc}^a$ dar) und nutzen Sie aus, dass an dem uns interessierenden Punkt $\Gamma_{bc}^a = 0$ (aber nicht $\partial_d \Gamma_{bc}^a = 0!$) gilt. Ersetzen Sie dann die partiellen Ableitungen durch die kovarianten (da an dem Punkt $\Gamma_{bc}^a = 0 \Rightarrow \partial_a = \nabla_a$).

Berechnen Sie jetzt die Variation $\delta \Gamma_{bc}^a$ bezüglich der Metrik. Ersetzen Sie hier auch ∂_a mit ∇_a und nutzen Sie die Eigenschaft $\nabla_a g_{bc} = 0$ (aber nicht $\nabla_a \delta g_{bc} = 0!$).

Setzen Sie dann die variierten Christoffel-Symbole in den Ausdruck für den variierten Ricci-Tensor ein und zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\delta R_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd} \nabla_a \nabla_c \delta g_{bd} - \frac{1}{2} g^{bd} \nabla_b \nabla_a \delta g_{ac} + g^{bd} \nabla_b \nabla_{(c} \delta g_{a)d}.$$

Im letzten Schritt zeigen Sie, dass

$$g^{ac} \delta R_{ac} = \nabla_a v^a$$

als vollständige Divergenz eines Vektor-Feldes v^a dargestellt werden kann, welches aus den Tensoren g_{bc} , δg_{bc} und deren Ableitungen gebildet ist.