UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Dr. N. Szpak
Fakultät für Physik

Allgemeine Relativitätstheorie

Termin: 11.12.2018

Blatt 9

Übung 1 (Linearisierter Lens-Thirring-Effekt)

Betrachten Sie Materie mit dem Energie-Impuls-Tensor (ideale Flüssigkeit ohne Druck)

$$T_{ab} = \rho\, u_a u_b.$$

In der nicht-relativistischen Näherung ($|\vec{v}| \ll c := 1$) kann die Materie mit

$$u^a = (1, \vec{v}), \qquad \vec{j} = \rho\, \vec{v}$$

beschrieben werden. Die linearisierten Einstein-Gleichungen für $h_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ reduzieren sich zu

$$-\Delta h_{00} = 8\pi\, \rho, \qquad -\Delta h_{0i} = 8\pi\, j_i,$$

wobei wir $\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$ im nicht-relativistischen Limes mit $-\Delta$ ersetzt haben.

a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für ein Testteilchen (Geodätengleichung mit linearisierten Christoffel-Symbolen) und zeigen Sie, dass diese in folgende Form gebracht werden kann

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi + (\mathrm{rot}\vec{A}) \times \vec{v}$$

mit $\Phi := \frac{1}{2}h_{00}$ und $A_i := h_{0i}$. Mit $\vec{E} := \nabla\Phi$ und $\vec{B} := \mathrm{rot}\vec{A}$ bekommt man die aus der Elektrodynamik bekannte Lorentzkraft

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{E} - \vec{B} \times \vec{v}$$

mit dem Unterschied, dass die Kraft alleine von dem Gravitationsfeld (oft als *gravitomagnetisches* Feld bezeichnet) erzeugt wird. Beobachten Sie, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auch entsprechende Maxwell-Gleichungen (in Coulomb-Eichung) erfüllen.

b) Rotierende schwere Körper erzeugen gravitomagnetische Kräfte, die Testteilchen in die Richtung der Rotation beschleunigen (bekannt als *frame-dragging-effect* oder Lens-Thirring-Effekt).

Betrachten Sie eine homogene Kugel mit Radius R und Dichte $\rho(r) = \rho_0 \cdot \Theta(R - r)$, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert, d.h. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Lösen Sie die obigen linearisierten Einstein-Gleichungen für h_{00} und h_{0i}.

c) Finden Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und berechnen Sie die Kraft, die auf ein Testteilchen wirkt. In welche Richtung wird das Teilchen auf dem "Äquator" beschleunigt, wenn es radial auf das Zentrum fällt? Und in welche Richtung wird es abgelenkt, wenn es über die "Pole" fliegt?

Hinweis: Um die Gleichung

$$-\Delta\vec{A} = 8\pi\rho_0\, \omega \times \vec{r}\, \Theta(R - r)$$

zu lösen, benutzen Sie den Ansatz $\vec{A} = \omega \times \vec{\nabla}\phi$ und reduzieren Sie die Gleichung zu einer Poisson-Gleichung für ϕ (d.h. $-\Delta\phi = ...$), welche in sphärischen Koordinaten gelöst werden kann. Die Gleichung für Φ ist schon eine Poisson-Gleichung.